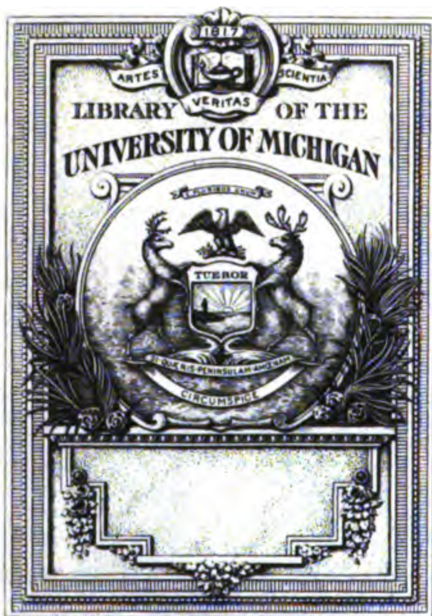
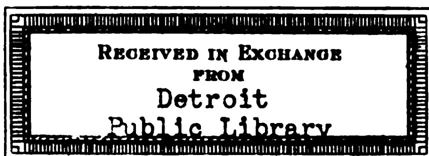

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



LEÇONS
DE GÉOMÉTRIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE
ADOPTÉES PAR L'UNIVERSITÉ,

PAR P.-L. CIRODDE,

DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU COLLÉGE ROYAL HENRI IV.

PRIX : 6 FRANCS.



A Dijon,

CHEZ DOUILLIER, IMPRIMEUR-LIBR. ET LITHOGRAPHE,
RUE DES GODRANS, N.° 41.

A PARIS, CHEZ HACHETTE, LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ,
RUE PIERRE-SARRAZIN, N.° 12.

1836.

AUTRES OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

A DIJON, CHEZ DOUILLIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE;

ET A PARIS, CHEZ HACHETTE, LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ, RUE PIERRE-SARRAZIN, N.° 12.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE adoptées par l'Université : 2.e édition; 1 vol. in-8.o. 1837.

THÉORIE DE L'ÉLIMINATION entre deux équations de degré quelconque à deux inconnues : broch. in-4.o. 1835.



AVERTISSEMENT.

Les élèves qui traversent chaque année les classes de mathématiques ne signalent que trop souvent, par leur indifférence, un vice bien grave de l'enseignement qu'ils y reçoivent, le défaut d'applications pratiques. On a remarqué en effet que là où les professeurs avaient pu éveiller l'intérêt des jeunes gens, en mettant sous leurs yeux des résultats immédiatement applicables aux usages de la vie et aux besoins de la société, le nombre de ces élèves inertes qui viennent user leur temps dans les classes avait sensiblement diminué. C'est pour contribuer à cette utile réforme que j'ai composé cet ouvrage. Toutefois je n'ai pas oublié que, dans un livre destiné à l'enseignement universitaire, les applications pratiques ne devaient être qu'un accessoire, et qu'il convenait en conséquence qu'elles fussent peu nombreuses, mais bien choisies. J'ai emprunté la plupart aux arts de construction, à l'établissement des machines, au dessin linéaire et au levé des plans, et quelques-unes à la physique et à l'astronomie.

Je suis revenu à l'ancienne division de la géométrie en trois parties, les *lignes*, les *surfaces* et les *corps* : car j'en avais reconnu les nombreux avantages dans le cours de *géométrie appliquée aux arts*, dont la ville de Dijon m'avait chargé en 1826; et j'ai adopté la méthode qu'avait indiquée pour les démonstrations relatives aux *incommensurables*, le savant modeste, l'homme de génie, dont les Sciences et l'Université déplorent la perte récente.

Eclairé par une longue expérience, et fort surtout de l'autorité du Conseil de perfectionnement de l'école polytechnique, qui a recommandé exclusivement la *méthode infinitésimale* dans l'exposition des principes de la mécanique rationnelle, j'ai eu recours à cette méthode toutes les fois que l'occasion s'en est présentée. Mais, pour conserver à la géométrie sa qualité

la plus précieuse, cette sévérité qui donne aux preuves toute la rigueur dont elles sont susceptibles, et en fait ainsi le cours de logique le plus parfait, j'ai dû constater, par des raisonnemens à l'abri de toute atteinte, l'exactitude des résultats fournis par la considération des infiniment petits.

J'ai pris pour définitions des *tangentes,* des *plans tangens* et de la *similitude,* celles mêmes qu'on en donne dans *l'application de l'algèbre à la géométrie.* Par là j'évite aux élèves l'obligation toujours très-pénible de substituer plus tard de nouvelles idées à celles qu'ils avaient acquises; par là j'ai considérablement simplifié une partie de la géométrie que les jeunes gens regardent tous comme très-difficile, puisque ma théorie des corps semblables ne diffère en rien de celle des figures planes semblables. En modifiant de même la définition de la *symétrie* dans l'espace, j'en ai fait un cas particulier de la similitude. Aussi j'ose espérer que les personnes qui liront ces théories avec le soin que réclame leur importance, y reconnaîtront la vérité de ce précepte proclamé par *Laplace,* et que j'ai eu constamment présent à l'esprit. « Préférez dans l'enseignement les méthodes générales; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont les plus faciles. »

J'ai eu soin de donner de nombreux exemples de toutes les difficultés de calcul qui arrêtent si souvent les élèves dans les examens; enfin, pour la commodité des professeurs qui voudraient se borner à un cours tout-à-fait élémentaire, tel qu'il convient, par exemple, aux élèves des écoles normales primaires, j'ai rédigé la table des matières d'après le *programme arrêté par le Conseil royal de l'instruction publique pour l'enseignement de la géométrie dans les classes de troisième des colléges royaux de Paris et de Versailles.*

LEÇONS
DE GÉOMÉTRIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. « J'avance mon bras dans l'obscurité, dit M. Biot dans son
» excellent traité de physique ; il rencontre un obstacle qui
» l'empêche de s'étendre ; ma main, promenée sur cet obstacle,
» trouve qu'il est limité, qu'il finit à certains endroits, commence
» à d'autres, et qu'autour de lui l'espace est libre : j'en conclus
» que cet obstacle existe, ou paraît exister hors de moi, dans une
» certaine portion de l'espace de laquelle son existence m'exclut ;
» d'après cela je l'appelle *un corps*. Le premier de ces phéno-
» mènes, la *limitation*, est le caractère de l'étendue *figurée*,
» c'est-à-dire douée d'une forme. Le second, l'exclusion des
» autres corps, est le caractère que l'on désigne par le nom
» d'*impénétrabilité*. » L'étendue et l'impénétrabilité, voilà les deux propriétés essentielles de la matière. Or il est possible, sinon de réaliser, au moins de concevoir des portions de l'espace qui seraient terminées de toute part, sans être pour cela impénétrables : c'est là précisément ce que nous ferons dans tout le cours de cet ouvrage. Ainsi *un* CORPS *ne sera, pour nous, qu'une portion de l'espace indéfini*, PÉNÉTRABLE, DIVISIBLE ET FIGURÉE. Cette portion de l'espace a toujours trois dimensions : *longueur, largeur* et *épaisseur*. Cette dernière prend quelquefois le nom de *hauteur* ou de *profondeur*.

2. *Les limites des corps s'appellent* SURFACES. Les surfaces sont étendues en longueur et en largeur seulement.

3. Lorsque deux surfaces se rencontrent, leur intersection est leur limite commune, et on l'appelle *ligne*. Ainsi *les* LIGNES *sont les limites des surfaces*. Elles ne sont étendues qu'en longueur.

4. Lorsque deux lignes se rencontrent, leur intersection est leur limite commune, et on l'appelle *point*. Ainsi *les* POINTS *sont les limites des lignes*. Le point n'a pas d'étendue.

5. Un corps ne saurait exister sans réunir les trois dimensions de l'étendue. Ainsi les surfaces, les lignes et les points n'existent pas indépendamment du corps, de la surface, ou de la ligne auxquels ils servent respectivement de limites; cependant nous pouvons très-bien, par une abstraction de notre esprit, les considérer isolément. Quand on se propose, par exemple, de mesurer la profondeur d'un étang, on ne s'occupe nullement de sa longueur et de sa largeur; tandis que si l'on veut en évaluer la surface, c'est de la profondeur au contraire qu'il n'est plus question. Mais on sent que si l'on a besoin de connaître la quantité d'eau contenue dans cet étang, on devra avoir égard à la fois à ses trois dimensions. En conséquence nous étudierons successivement les propriétés des lignes, des surfaces et des corps considérés relativement à leur étendue, et nous apprendrons à les mesurer. Tel est l'objet et la division naturelle de la *géométrie*. Nous définirons donc LA GÉOMÉTRIE *une science qui a pour objet l'étude des propriétés de l'étendue et la mesure de cette étendue*.

6. On distingue trois sortes de lignes: *la droite, la brisée* et *la courbe*.

7. *La ligne* DROITE *est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre*. Cette définition est insuffisante en ce sens qu'elle ne saurait donner l'idée de la ligne droite à celui qui n'aurait pas déja acquis cette idée. Mais ceci est peu important: car il n'est personne qui ne sache très-bien ce que c'est qu'une ligne droite. Au reste nous observerons que cette définition revient à cet axiome sur lequel repose toute la géométrie:

8. *Entre deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite.*

9. D'où il suit que *deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un seul point commun.*

10. Remarquons que *la ligne droite, qui joint deux points,* étant le plus court chemin pour aller de l'un à l'autre, *est la mesure naturelle de la distance de ces deux points.*

11. *Une ligne* BRISÉE *est un assemblage de lignes droites consécutives que l'on appelle ses côtés.*

12. *Une ligne courbe est une ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites.*

AB est une ligne droite, ACDB une ligne brisée, et AMB est une ligne courbe. Fig. 1.

13. Il est évident que *l'on peut mener d'un point à un autre une infinité de lignes courbes ou brisées.*

14. Il suit des définitions mêmes du point et de la ligne (3 et 4) que *l'on peut regarder une ligne comme engendrée par le mouvement d'un point, et une surface par le mouvement d'une ligne.*

15. De même qu'il y a des lignes droites et des lignes courbes, de même il y a aussi des surfaces planes et des surfaces courbes.

LA SURFACE PLANE *ou* LE PLAN *est une surface sur laquelle prenant deux points à volonté et les joignant par une ligne droite, cette droite est tout entière sur la surface.* Il suit de là que, pour vérifier si une portion de surface est plane, il n'y a qu'à lui appliquer l'arête d'une règle bien dressée, et voir si, dans chaque position, la règle coïncide exactement avec la surface.

16. *Une surface courbe est celle qui n'est ni plane ni composée de surfaces planes.*

THÉORÈME.

17. *Trois points qui ne sont pas situés en ligne droite déterminent un plan, c'est-à-dire qu'on peut toujours faire passer un plan par ces trois points, mais qu'on ne peut en faire passer qu'un.*

Soient A, B, C ces trois points. Joignons-en deux quelconques, A et B, par exemple, par une ligne droite. On pourra évidemment (15) faire passer un plan par la droite AB, et, si l'on conçoit que ce plan tourne autour de cette droite, il viendra bientôt s'appuyer sur le point C : donc déja on peut faire passer un plan par les trois points A, B, C. Fig. 2.

Je dis maintenant que l'on n'en pourra faire passer qu'un seul. Supposons, en effet, que l'on puisse mener un second plan par les trois points A, B, C, et joignons AC et BC. Il suit de la définition du plan que les trois droites indéfinies AB, AC et BC seront tout entières dans chacun des deux plans. Cela posé, tirons une ligne droite indéfinie MN par un point quelconque M du se-

cond plan et un point O situé dans la portion de ce plan comprise entre les droites AB, AC et BC : il est clair qu'elle coupera nécessairement deux de ces droites, sans quoi elle aurait deux points communs avec la troisième, ce qui est absurde (8) : donc elle aura deux points dans chaque plan, et par conséquent elle y sera tout entière. Donc tout point M du second plan est en même temps dans le premier; donc ces deux plans coïncident; donc trois points non en ligne droite déterminent un plan.

THÉORÈME.

Fig. 5. 18. *Deux droites*, AB *et* CD, *qui se coupent, déterminent aussi un plan.*

Marquons, en effet, les deux points B et D sur les droites AB et CD. Il sera toujours possible de faire passer un plan par les trois points B, O, D qui ne sont pas en ligne droite, et ce plan contiendra les droites AB et CD : car chacune aura deux points dans ce plan; de plus, on n'en pourra faire passer qu'un seul, sans quoi deux plans pourraient avoir les trois points communs B, O, D sans coïncider. Donc par deux droites qui se coupent on peut faire passer un plan, et l'on ne peut en faire passer qu'un : donc deux pareilles droites déterminent un plan.

Le procédé que suit le tailleur de pierre pour exécuter une surface plane, est fondé sur ce théorème. Il forme, sur deux bords contigus de la pierre, deux bandes sur lesquelles il puisse appliquer l'arête de sa règle, et alors il y trace avec la pierre noire deux lignes droites qui se coupent. Puis, regardant ces lignes comme deux *directrices* fixes, il fait glisser sur elles l'arête de sa règle, et il ôte de la pierre tout ce qui empêche cette arête de s'appliquer exactement dans tous les sens sur les deux droites.

THÉORÈME.

19. *L'intersection de deux plans est une ligne droite, et celle de trois plans est un point.*

1.° D'abord l'intersection de deux plans est une ligne (3); or, si cette ligne n'était pas droite, les deux plans dont il s'agit coïncideraient : car ils auraient plus de deux points communs qui ne seraient pas en ligne droite (17).

2.° L'intersection de trois plans, n'étant évidemment que l'in-

tersection de l'un d'eux avec la droite suivant laquelle se coupent les deux autres, sera par conséquent un point.

20. On ne considère dans la géométrie élémentaire qu'une seule espèce de ligne courbe, *la circonférence du cercle*. On appelle ainsi *une ligne dont tous les points sont situés sur un même plan, et également éloignés d'un autre point pris dans ce plan. Ce point se nomme le centre.* ABCD est une circonférence dont O est le centre. Les lignes qui, comme OA, vont du centre à la circonférence, se nomment *rayons*. Il est visible que tous les rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent les distances du centre aux différens points de la circonférence (10). Fig. 4.

On appelle *diamètre* une droite qui, passant par le centre, va se terminer à la circonférence. Un diamètre est donc la somme de deux rayons, et ainsi *tous les diamètres sont égaux*.

Une partie quelconque de la circonférence se nomme *arc*; ainsi AB, BC, ... sont des arcs.

La partie du plan enveloppée par la circonférence est LE CERCLE.

21. Il est clair que l'on décrira une circonférence en fixant sur un plan une des pointes d'un compas ouvert, et en faisant tourner l'autre pointe autour de la première, de manière qu'elle ne quitte pas le plan.

Remarquons que l'empreinte laissée sur le plan par la pointe mobile n'est pas rigoureusement une ligne : car elle a nécessairement de la largeur; mais aussi qu'elle en différera d'autant moins que cette pointe sera plus fine. *La pointe à tracer devra donc être aussi aiguë qu'il sera possible.*

22. Si le rayon de la circonférence à décrire surpasse l'écartement dont sont susceptibles les deux branches du compas, on emploie une règle armée à l'une de ses extrémités d'une pointe *fixe* A, et pouvant glisser dans un bracelet en cuivre auquel est attachée une autre pointe B. Ce bracelet se fixe sur la règle au moyen d'une vis de pression, de sorte que l'on peut ainsi amener les deux pointes à telle distance invariable que l'on veut. Fig. 5.

23. Enfin si le rayon de la circonférence à décrire doit être très-grand, on fait usage d'un cordeau bouclé à ses extrémités; on passe dans l'une des boucles une pointe fixée au centre, et dans l'autre la pointe à tracer. Il faut avoir soin de tenir le cor-

deau toujours également tendu, et d'empêcher les boucles de glisser le long des pointes, afin que la longueur du rayon reste invariable.

Le tracé des circonférences se présente sans cesse dans le dessin linéaire et dans la pratique des arts : car les roues des machines, par exemple, les meules des moulins, les tronçons des colonnes, les cintres des portes et des fenêtres, etc., sont terminés par des circonférences ou par des parties de circonférence.



PREMIÈRE PARTIE.

DES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

DU TRACÉ ET DE LA MESURE DES LIGNES DROITES.

N. B. Dans cette première partie et dans la première section de la seconde nous supposerons toutes les figures tracées sur un même plan.

THÉORÈME.

24. *Deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue.*

Soient en effet ZX et Z'X' deux lignes droites, et supposons que l'on porte la seconde sur la première en plaçant les points A' et B' respectivement sur les points A et B. D'abord il est clair que les deux droites coïncideront parfaitement dans l'intervalle de A à B (8); mais en sera-t-il de même au-delà de ces points? Supposons qu'elles se séparent en C, de sorte que Z'X' prenne la position ABCY, et faisons tourner cette dernière autour de A jusqu'à ce que le point quelconque Y soit venu se placer sur un certain point X de la première droite. Il est clair que tous les points de ABY, à l'exception de A, auront participé à son mouvement, et qu'ainsi tous ceux de ses points qui se trouvaient sur ABX s'en seront détachés. Nous aurons donc ainsi deux droites distinctes de A en X, ce qui est absurde: donc il était pareillement absurde de supposer que les deux droites pussent se séparer; donc elles coïncident entièrement. Fig. 6.

25. Corollaire. *Deux points donnés déterminent la position d'une droite:* car on peut évidemment tirer une ligne droite par ces deux points (7), et nous venons de voir qu'on ne peut en faire passer qu'une.

26. Pour tracer une ligne droite par deux points donnés sur un plan (ces points y sont représentés par deux empreintes faites avec une pointe très-fine), on applique sur ce plan une règle

dont une des arètes passe à égale distance des deux points, et aussi près de chacun que le comporte l'épaisseur de la pointe à tracer, et il n'y a plus qu'à faire glisser cette pointe le long de l'arète, en ayant soin toutefois de maintenir la règle dans une position invariable (*a*).

27. Lorsque la ligne doit être un peu grande, ce qui arrive quand on veut tracer, par exemple, une allée dans un jardin, on tend, entre les deux points donnés, un cordeau avec des piquets, et ce cordeau prend *sensiblement* la forme de la ligne droite qui les unit. Je dis sensiblement : car on démontre dans la statique qu'il est impossible de tendre rigoureusement un fil en ligne droite, à moins que sa direction ne soit verticale, ou qu'il ne soit appuyé sur un plan qui l'empêche de se courber; mais aussi qu'il se courbe d'autant moins que la tension qu'il éprouve est plus considérable. Si donc on tend fortement sur un plan un cordeau, préalablement frotté d'ocre ou de blanc d'Espagne, puis qu'on le pince pour le laisser retomber d'*aplomb* sur le plan, il y tracera la ligne droite demandée. Tel est le procédé qu'emploient les charpentiers.

28. Si l'on a une droite fort grande à tracer, s'il s'agit, par exemple, de percer une route ou de creuser un canal, on se contente de marquer un certain nombre de points de cette ligne.
Fig. 8. Pour cela, on plante aux deux points donnés A et B deux jalons bien verticaux (*b*), ce dont on s'assure en comparant leur di-

---

(*a*) Ce procédé exige que la règle que l'on emploie soit parfaitement dressée. Pour s'assurer qu'elle jouit de cette qualité, le moyen le plus simple est de placer l'œil dans le prolongement de l'arète que l'on veut vérifier, et cette arète ne doit paraître alors que comme un seul point, parce qu'en effet la lumière se propage d'un point à un autre, en suivant la ligne droite qui les unit.

On peut encore vérifier très-simplement une règle de la manière suivante. Tracez avec votre règle une ligne sur un plan, et marquez deux points
Fig. 7. A et B sur cette ligne; puis, retournant la règle bout pour bout, de manière que la même face soit toujours appuyée sur le plan, tirez une seconde ligne par les points A et B. On sent que les inégalités qui se trouvent d'un côté de la première ligne seront ainsi reportées du côté opposé de la seconde, et que par conséquent ces deux lignes ne pourront coïncider que si la règle est parfaitement droite.

(*b*) Un jalon est un bâton bien droit, d'environ deux mètres de longueur, et dont un des bouts est terminé en pointe pour que l'on puisse l'enfoncer plus facilement dans la terre.

rection à celle d'un fil à plomb; puis, se plaçant à un mètre environ de l'un d'eux A, on fait planter d'autres jalons à différens points C, D, E, ..., de manière qu'en regardant avec un seul œil, le premier jalon A couvre la file de tous les autres. Alors tous les points C, D, E, ... sont dans la droite AB.

En effet tout le monde sait que la direction de la *pesanteur*, c'est-à-dire de cette force inconnue qui fait descendre les corps vers la terre lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes, est celle même d'un fil à plomb en équilibre. Cette direction de la pesanteur ou du fil à plomb, dans le lieu que l'on considère, se nomme *la verticale* de ce lieu; elle va passer par le centre de la terre. Si donc on conçoit un plan par ce centre et par le rayon visuel que l'on dirige par les axes de tous les jalons (17), ce plan contiendra tous ces axes (15): donc l'intersection de ce plan avec la surface du terrain supposée plane est une ligne droite qui passe par les pieds A, C, D, E....... B de tous les jalons (19).

29. La ligne droite qui joint deux points étant, comme nous l'avons vu (10), la mesure de leur distance, on sent combien il est important de savoir mesurer une ligne droite. Occupons-nous donc de cette question.

PROBLÈME.

Mesurer une droite donnée.

Mesurer une ligne droite, c'est chercher le rapport de cette droite à une autre que l'on est *convenu* de prendre pour unité. Or si cette unité est contenue un nombre exact de fois dans la droite à mesurer, ce nombre est la mesure demandée; mais lorsqu'il n'en est pas ainsi, il faut chercher s'il n'y a pas une certaine longueur qui, étant contenue exactement dans l'unité linéaire et dans la droite donnée, soit par conséquent la commune mesure de toutes deux. Si l'on trouve, par exemple, que la droite donnée et l'unité linéaire contiennent respectivement 15 fois et 7 fois une même longueur, on en conclura que cette longueur est *le septième* de l'unité linéaire, et qu'ainsi la droite à mesurer vaut quinze fois le septième de cette unité, c'est-à-dire qu'elle en est les $\frac{15}{7}$. Donc la mesure demandée est exprimée par une fraction dont les deux termes sont les nombres de mesures communes comprises dans les deux droites que l'on a comparées. Quoique cette fraction ne soit pas assignable numéri-

quement lorsque la droite proposée est incommensurable avec l'unité, elle n'en existe pas moins, et nous verrons, dans un instant, que l'on peut, sinon l'obtenir exactement, du moins en approcher d'aussi près que l'on veut.

30. La détermination de la mesure d'une droite est donc ramenée à la solution de ce problème : *Deux droites* AB et CD *étant données, trouver leur commune mesure si elles en ont une.*

Fig. 9. Si l'on raisonne sur les deux droites données comme on l'a fait dans l'arithmétique quand il s'est agi de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on sera conduit à porter la plus petite CD sur la plus grande AB, autant de fois que la chose sera possible, et l'on trouvera qu'elle y est contenue deux fois de A en F avec un reste FB ; de sorte que

$$AB = 2\,CD + FB \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

Ce qui montre que CD n'est pas la commune mesure demandée. Mais on verra encore, comme dans l'arithmétique, que la plus grande commune mesure des droites AB et CD est la même que celle de CD et de FB. Je porte donc FB sur CD, et je trouve qu'elle y est contenue trois fois de C en G, avec un reste GD : donc

$$CD = 3\,FB + GD \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Je porte maintenant GD sur FB : elle y est comprise une fois, avec un reste IB : donc

$$FB = GD + IB \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Enfin, en portant IB sur GD, on trouvera qu'elle y est contenue trois fois exactement, et qu'ainsi

$$GD = 3\,IB.$$

IB est donc la plus grande commune mesure des droites AB et CD.

Concluons de là que *pour trouver la plus grande commune mesure de deux droites, il faut leur appliquer la méthode donnée en arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.* En conséquence on est convenu d'appeler *quotient* le nombre qui indique combien de fois un *reste* quelconque est contenu dans le précédent.

31. Maintenant que nous connaissons la commune mesure des droites AB et CD, il faut, pour évaluer leur rapport, déterminer combien de fois chacune d'elles contient IB. Or l'équa-

tion (3) nous montre que, comme GD = 3IB, FB vaudra 3IB + IB = 4IB. En remontant de même aux équations (2) et (1), on trouvera d'abord que CD vaut d'une part trois fois 4IB ou 12IB, et de l'autre 3IB, ce qui fait 15IB; ensuite que AB contient deux fois 15IB ou 30IB, et encore 4IB, c'est-à-dire 34IB. Donc, puisque la commune mesure IB est contenue trente-quatre fois dans AB et quinze fois dans CD, on en conclut que le rapport de ces deux droites est $\frac{34}{15}$, et que par conséquent, si CD est l'unité linéaire, cette fraction $\frac{34}{15}$ est la mesure ou *la longueur* de AB.

32. *Nous appellerons désormais* LONGUEUR D'UNE LIGNE *le rapport de cette ligne à l'unité linéaire.*

33. Remarquons que cette fraction $\frac{34}{15}$ est nécessairement irréductible, sans quoi IB ne serait pas la plus grande commune mesure des droites AB et CD. On voit en effet que si l'on avait trouvé, par exemple, AB = 35IB, auquel cas le rapport de AB à CD serait $\frac{35}{15}$, fraction dont les deux termes sont divisibles par 5, ces deux droites auraient 5IB pour commune mesure: car alors AB et CD vaudraient respectivement 7 fois et 3 fois 5IB.

34. Lorsque deux droites A et B sont commensurables, l'opération du n.° 30 se termine nécessairement : car si a et b indiquent combien de fois elles contiennent cette commune mesure K, on a A = a K et B = b K, de sorte que l'opération dont il s'agit ne diffère pas de celle qu'il faudrait exécuter sur les nombres a et b pour déterminer leur plus grand commun diviseur, et celle-ci n'exige qu'un nombre fini de divisions.

35. Si au contraire les droites A et B sont incommensurables, l'opération ne peut pas se terminer (a) : car si l'on pouvait trouver un reste qui fût contenu exactement dans le précédent, ce reste serait une commune mesure des droites A et B. On ne pourra donc pas évaluer exactement le rapport de ces droites, et il faudra en conséquence se borner à des approximations. Or je dis que si, négligeant un reste quelconque, on regarde le précédent, que je désignerai par K, comme la commune mesure

(a) Observons qu'il n'en sera jamais ainsi dans la pratique : car on arrivera bientôt à un reste qui échappera aux sens par sa petitesse.

des deux droites A et B, et qu'on en déduise leur rapport d'après la méthode du n.° 31, la valeur ainsi trouvée approchera d'autant plus de la véritable que le reste K sera plus petit. Supposons en effet que les droites A et B contiennent a fois et b fois la droite K avec des restes respectifs α et β, moindres que K. On aura : $A-\alpha=a\,K$, et $B-\beta=b\,K$: donc le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ est égal à $\frac{a}{b}$; mais il est évident qu'il diffère d'autant moins du rapport $\frac{A}{B}$ que α et β sont plus petits (a), et que sa limite est précisément le rapport de A à B. Or, quelle que soit cette limite, qu'elle soit ou qu'elle ne soit pas assignable exactement en nombre, c'est elle qui est le *rapport* de A à B. On aura donc une valeur de ce rapport d'autant plus approchée que le reste pris pour commune mesure sera plus petit.

36. Les élèves qui connaissent la théorie des fractions continues verront facilement que le rapport $\frac{A}{B}$ peut se développer en une fraction continue dont les fractions intégrantes auront pour dénominateurs les quotiens successifs que l'on trouve en cherchant la plus grande commune mesure des droites A et B;

(a) Si cette assertion ne paraît pas assez évidente, on pourra dire : le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ est compris entre $\frac{A-\alpha}{B}$ et $\frac{A}{B-\beta}$, ainsi que le rapport $\frac{A}{B}$. Or ces deux limites se rapprochent d'autant plus de celui-ci que α et β sont plus petits; et comme ces quantités sont susceptibles de décroître indéfiniment, il s'ensuit que chacune de ces deux fractions, et *à fortiori* le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}=\frac{a}{b}$, pourra différer d'aussi peu que l'on voudra du rapport $\frac{A}{B}$.

On ne saurait douter que les quantités α et β n'aient zéro pour limite : car, si l'on considère trois restes consécutifs quelconques R, R', R'', on a $R'>R''$. Mais R vaut au moins $R'+R''$: donc il est plus grand que $2R''$; donc un reste quelconque est moindre que la moitié du reste antéprécédent; donc le 2.e, le 4.e, le 6.e,....... restes sont respectivement plus petits que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,...... de la plus petite droite B; donc après un nombre suffisant d'opérations on arrivera à un reste K moindre que toute droite donnée (arith.e 295). Or α et β sont plus petites que K : donc ces quantités ont bien zéro pour limite.

de sorte que cette fraction continue se terminera ou ne se terminera pas suivant que ces droites seront ou ne seront pas commensurables.

Désignons en effet par q, q', q'',.... les quotiens successifs, et par R, R', R'',.... les restes correspondans. On aura donc d'abord :

$$A = qB + R,$$

Ce qui montre que le rapport $\frac{A}{B}$ est égal au quotient q augmenté du rapport $\frac{R}{B}$; mais ce dernier est égal à l'unité divisée par ce rapport renversé, c'est-à-dire par le rapport $\frac{B}{R}$: donc

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{\frac{B}{R}} \qquad \text{...........(1)}$$

On aura ensuite les égalités

$$B = q'R + R'$$
$$R = q''R' + R''$$
etc.

desquelles on tire, comme tout à l'heure,

$$\frac{B}{R} = q' + \frac{1}{\frac{R}{R'}} \qquad \text{............(2)}$$

$$\frac{R}{R'} = q'' + \frac{1}{\frac{R'}{R''}} \qquad \text{...........(3)}$$

etc.

Substituant, dans (1), à $\frac{B}{R}$ sa valeur (2); puis, dans l'expression résultante, à $\frac{R}{R'}$ sa valeur (3), et ainsi de suite, on trouvera en définitive :

$$\frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \text{etc.}}}$$

On voit ainsi que les fractions trouvées en regardant successivement chaque reste comme la commune mesure des droites A et B sont précisément les fractions convergentes de cette fraction continue, de sorte que la valeur obtenue pour le rap-

port $\frac{A}{B}$, en s'arrêtant à un certain reste, est effectivement d'autant plus approchée que l'on aura poussé l'opération plus loin.

37. Il suit de là que *si en cherchant la plus grande commune mesure de deux autres quantités homogènes* A′ *et* B′, *on trouve la même série de quotiens que ceux auxquels a conduit la recherche de la plus grande commune mesure des droites* A *et* B, *on devra en conclure que les deux rapports* $\frac{A'}{B'}$ *et* $\frac{A}{B}$ *sont égaux, et qu'on a la proportion*

$$A' : B' :: A : B.$$

En effet, le rapport $\frac{A}{B}$ étant la limite des fractions que l'on obtient en regardant successivement chaque reste de la première série d'opérations comme la commune mesure des quantités A et B, le rapport $\frac{A'}{B'}$ est aussi la limite de ces mêmes fractions. On peut donc trouver une quantité qui approche d'aussi près que l'on voudra des deux rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$: donc il ne peut pas y avoir de différence entre eux.

38. On peut dire aussi, et plus simplement, que les deux rapports $\frac{A'}{B'}$ et $\frac{A}{B}$ sont égaux, puisque si on les développe en fractions continues (36), on trouvera pour tous deux la même expression.

39. Lorsque, dans la pratique des arts, on a une ligne à mesurer, on évite de la manière suivante les opérations et les calculs des n.os 30 et 31. Pour cela on commence par diviser l'unité linéaire en un grand nombre de parties égales, par exemple en 10, ou en 100, ou en 1000 parties; puis on porte cette unité sur la ligne à mesurer autant de fois que la chose est possible, et ensuite la portion de ligne restante sur l'unité. Cette double opération fait connaître combien la droite donnée contient d'unités et de dixièmes, ou de centièmes, ou de millièmes de cette unité, et en donne par conséquent la longueur. Ainsi, avec un mètre divisé en mille parties, on peut avoir la mesure d'une droite à moins d'un millimètre, et même à moins

d'un demi-millimètre près : car si, après avoir porté le mètre CD sur *la longueur* à mesurer AB, et trouvé qu'il y est contenu *deux fois*, on porte ensuite le reste FB sur CD′ à partir du *point* C, numéroté *zéro*, et que son extrémité tombe entre la 267.ᵉ et la 268.ᵉ division, mais plus près de celle-ci, par exemple, *que de* l'autre, on prendra 268 millimètres pour la valeur approchée de FB, et l'on en conclura ainsi que AB vaut 2^m, 268 à moins d'un demi-millimètre près. Fig. 9.

40. Mais dans les arts de précision l'approximation précédente est loin d'être suffisante. On a recours alors à un instrument nommé *vernier* (*a*), avec lequel on peut atteindre un très-grand degré d'exactitude. Le vernier n'est autre chose qu'une règle VV mobile le long de la règle CD, dont on veut fractionner les parties. Elle est aussi divisée en parties égales, mais plus petites que celles de CD, tellement, par exemple, que 9 divisions de celles-ci en valent 10 du vernier : alors une division du vernier est les $\frac{9}{10}$ d'une de celles de la règle. Par-conséquent, si l'on fait coïncider le zéro du vernier avec un trait quelconque A de la règle, les traits numérotés 1, 2, 3, 4, ... du vernier, seront chacun en arrière du trait suivant de la règle respectivement de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, ... d'une division de celle-ci : aussi l'extrémité du vernier coïncide-t-elle avec la 9.ᵉ division de la règle à partir de A. Donc, si l'on pousse le vernier le long de la règle, de sorte que son *n*.ᵉ trait vienne coïncider avec le suivant de la règle, ses deux extrémités auront marché chacune de *n* dixièmes d'une division de la règle. Donc *chaque extrémité du vernier dépasse la division précédente de la règle d'autant de dixièmes d'une division de celle-ci qu'il est marqué par le numéro du trait du vernier qui coïncide avec un trait de la règle.* Fig. 10.

D'après cela, pour évaluer la partie restante FB de la ligne AB, on la portera de C en K sur l'unité linéaire CD, et l'on amènera l'une des extrémités du vernier, le zéro, par exemple, à répondre au point K, qui tombe, comme on voit, entre la 267.ᵉ et la 268.ᵉ division. Comme la coïncidence a lieu sur le 7.ᵉ trait du vernier, on en conclura que son zéro dépasse Fig. 9. Fig. 11.

(*a*) C'est le nom du géomètre français qui l'a inventé.

le 267.e trait de CD des $\frac{7}{10}$ d'une division de la règle, c'est-à-dire de $\frac{7}{10}$ de millimètre. Donc FB $= 267^{m.m}, 7$.

Lorsqu'aucune des divisions du vernier ne coïncide avec celles de la règle, on prend pour le numéro de la coïncidence celui des traits du vernier qui approche le plus de l'un de ceux de la règle. Si, par exemple, les traits n.ºs 6 et 7 du vernier sont compris entre deux traits consécutifs de la règle, mais de manière que le 6.e soit plus près de son correspondant que le 7.e, on prendra $\frac{6}{10}$ de millimètre pour la quantité dont le zéro du vernier est écarté du trait précédent de la règle, et l'erreur sera moindre qu'un demi-dixième de division de la règle : car si l'on poussait le vernier assez à droite pour que les traits n.º 6 et n.º 7 fussent équidistans des traits de la règle qui les comprennent, il est clair qu'il n'indiquerait alors que $6\frac{1}{2}$ dixièmes d'une division : donc le zéro ne dépasse pas le trait précédent de la règle de 6 dixièmes et demi.

Il est évident que l'on obtiendrait un plus grand degré d'exactitude, si le vernier embrassait un plus grand nombre de divisions de la règle, puisqu'alors, ses divisions différant moins de celles de la règle, sa marche serait plus petite d'une coïncidence à une autre.

Supposons en effet que ν divisions du vernier en vaillent $(\nu-1)$ de la règle : une division du vernier en vaudra $\frac{\nu-1}{\nu} = 1 - \frac{1}{\nu}$ de la règle; de sorte que la quantité dont le vernier se meut par les coïncidences successives de ses divisions est la ν.^{e} partie d'une division de la règle, quantité d'autant plus petite que ν est plus grand. Donc le vernier est d'autant plus sensible qu'il contient un plus grand nombre de parties de la règle. Ainsi, en *théorie*, il est susceptible de fournir une approximation indéfinie; mais cette approximation est limitée dans la *pratique* par la difficulté d'observer exactement sur quelle division du vernier se fait la coïncidence, même en employant une loupe, et cette difficulté augmente à mesure que les parties du vernier diffèrent moins de celles de la règle. C'est pour cela que l'on n'a pu pousser l'approximation des mesures de longueur, au moyen du vernier, que jusqu'à *un cinquantième* de millimètre.

41. Lorsque l'on a à mesurer une distance sur le terrain, on emploie la *chaîne métrique*. C'est une chaîne composée de 100 morceaux de gros fil de fer, dont chacun a un décimètre

de long, y compris les petits anneaux qui les unissent deux à deux, de sorte qu'elle a un décamètre. Deux personnes, portant les deux extrémités de la chaîne, cheminent sur la direction de la droite dont il s'agit, direction que l'on a eu soin de bien déterminer par un nombre suffisant de jalons. Celle qui marche devant porte un paquet de *fiches* de fer qu'elle plante successivement à l'extrémité de la chaîne, et l'autre les ramasse à mesure. Le nombre des fiches ainsi relevées indique le nombre de décamètres contenus dans la distance cherchée. Remarquons qu'il faut avoir soin de bien tendre la chaîne, et de la tendre bien horizontalement. Comme il est impossible qu'elle ne se courbe pas un peu (27), on lui donne environ deux centimètres de plus qu'un décamètre.

Si l'on connaissait la longueur de sa chaussure, on pourrait l'employer très-commodément pour mesurer une distance donnée : car il suffirait, pour cela, de placer alternativement les deux pieds l'un devant l'autre, et de compter combien il y en aurait dans cette distance. Or rien n'est plus facile que de déterminer très-exactement la longueur de la chaussure : on n'aura qu'à porter un grand nombre de fois les deux pieds l'un devant l'autre sur une surface plane et le long d'une ligne bien droite; mesurer avec soin la longueur de cette ligne, et la diviser par le nombre des pieds qu'elle contient. Si, par exemple, cette ligne contenait $26^{m},534$, et que le pied y eût été porté 100 fois, on en conclurait que la chaussure avait $0^{m},26534$.

THÉORÈME.

42. *Si deux brisées* ABC *et* AOC, *composées chacune de deux lignes droites, se terminent aux mêmes points* A *et* C, *et que l'une enveloppe l'autre, la première sera plus grande que la seconde.* Fig. 12.

Prolongeons en effet AO jusqu'à sa rencontre en D avec BC, le point D sera situé entre B et C, puisque ABC enveloppe AOC. Cela posé, la droite OC est plus courte que la brisée ODC (7): donc, en ajoutant AO de part et d'autre, on aura:

$$AOC < ADC.$$

D'un autre côté la droite AD est plus courte que la brisée ABD : donc en ajoutant BD de part et d'autre on aura :

$$ADC < ABC;$$

Donc AOC, qui est moindre que ADC, est à plus forte raison plus petite que ABC.

CHAPITRE II.

DE L'ANGLE, ET DES DROITES PERPENDICULAIRES, OBLIQUES ET PARALLÈLES.

Fig. 5. 43. Lorsque deux droites AB, CD, se coupent, elles partagent le plan qu'elles déterminent (18) en quatre parties AOC, COB, BOD, DOA, dont chacune s'appelle un *angle*. Ainsi *un* ANGLE *est une portion indéfinie de surface plane, comprise entre deux droites qui se coupent, et sont terminées à leur point de section.* Ce point se nomme *le sommet* de l'angle, et les deux droites en sont *les côtés*. Ainsi O est le sommet de l'angle AOC, et AO et OC sont ses deux côtés. On désigne, comme on voit, un angle par trois lettres, dont les deux extrêmes indiquent deux points de ses côtés, et dont celle du milieu appartient au sommet. Quelquefois même on dénomme un angle par la lettre placée à son sommet; mais il faut pour cela que ce sommet ne soit pas commun à d'autres angles. Ainsi dans la figure 1.re nous dirons l'angle C pour désigner l'angle ACD.

44. Remarquons que la grandeur d'un angle dépend de la quantité de surface plane comprise entre ses côtés, et par conséquent de leur écartement : ainsi, si l'on fait sur AB l'angle DAB égal à BAC, sur AD l'angle FAD = DAB, etc., les angles DAC, FAC, ... seront respectivement double, triple, ... de l'angle BAC. D'où il suit que, quoique les angles soient des quantités infinies, on peut cependant les comparer à l'un d'eux pris pour *unité*, par suite les mesurer, et conséquemment les soumettre à toutes les opérations du calcul. Ainsi en prenant BAC pour unité, les angles DAC et FAC vaudront l'un 2, et l'autre 3 unités.

Fig. 15.

45. Puisque les côtés d'un angle doivent toujours être supposés indéfinis, et que deux droites coïncident dans toute leur étendue lorsqu'elles ont seulement deux points communs (24), on devra conclure que *deux angles sont égaux lorsque, étant placés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement dans une certaine portion de leur étendue.*

46. Ce principe a donné l'idée d'un instrument très-simple pour faire un angle égal à un autre. Cet instrument, que l'on nomme *une fausse équerre*, est composé de deux règles AB

Fig. 14.

et AC qui tournent *à frottement dur* sur un même pivot auquel elles sont fixées, comme les branches d'un compas. Cela posé, si l'on veut mener par le point O de la ligne OD une droite qui fasse avec elle un angle égal à FGI, on ajustera la fausse-équerre de manière que les deux arêtes intérieures coïncident exactement avec les côtés de cet angle; ainsi l'angle qu'elles formeront alors sera parfaitement égal à FGI : donc si l'on place l'arête AB sur OD, le point A sur O, et qu'on fasse glisser une pointe à tracer le long de l'arête AC, la droite OK formera avec OD un angle égal à BAC, et par conséquent à FGI. Fig. 15.

Quelquefois chaque règle est terminée par une pointe, et l'on peut alors employer la fausse équerre aux mêmes usages que le compas.

47. Si l'on conçoit qu'une droite OC, d'abord couchée sur AB, tourne autour du point O, en s'éloignant de la partie OA, cette droite formera avec AB deux angles que l'on appelle *adjacens*, dont l'un, COA, ira constamment en augmentant depuis zéro, et dont l'autre, COB, ira au contraire en diminuant sans cesse jusqu'à devenir nul, ce qui arrivera quand CO sera couchée sur BO. On conçoit d'après cela qu'il y aura une position OD de la droite mobile, dans laquelle elle fera avec AB deux angles égaux, DOA et DOB : on dit qu'elle est alors *perpendiculaire* sur AB. Ainsi *une droite est perpendiculaire sur une autre lorsqu'elle fait avec cette autre deux angles adjacens égaux, et ces angles se nomment angles droits.* Fig. 16.

THÉORÈME.

48. *Par un point pris sur une droite on ne peut lui élever qu'une seule perpendiculaire.*

La vérité de cette proposition est une conséquence immédiate des considérations précédentes; mais on peut encore la démontrer *à priori* de la manière suivante.

Supposons, en effet, que par le point O de la droite AB on puisse lui élever deux perpendiculaires OD et OC, nous aurons donc DOA = DOB et COA = COB. Or l'angle COB est plus grand que DOB, et par conséquent que son égal DOA; mais celui-ci est plus grand que COA : donc à plus forte raison COB est-il plus grand que COA; donc CO ne peut pas être perpendiculaire sur AB; donc on ne peut élever par le point O que la seule perpendiculaire OD sur AB.

THÉORÈME.

49. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*

Fig. 17. Soient OC perpendiculaire sur AB, et O'C' perpendiculaire aussi sur A'B'; je dis que les angles droits C'O'A' et C'O'B' sont égaux aux angles droits COA et COB. Marquons, en effet, sur le côté AO le point quelconque D, et prenons sur O'A' la distance O'D' = OD. Supposons maintenant que l'on porte la figure C'A'B' sur la figure CAB, en plaçant les points O' et D' respectivement sur les points correspondans O et D, ce qui est possible, puisque O'D' = OD; les deux droites A'B' et AB coïncideront alors dans toute leur étendue (24), et par conséquent O'C' tombera sur OC, sans quoi on aurait par le même point O deux perpendiculaires sur AB, ce qui ne se peut (48). Donc les angles C'O'A' et C'O'B' recouvriront parfaitement les angles respectifs COA et COB: donc ces angles sont égaux; mais ils sont droits: donc les angles droits sont égaux.

50. On appelle angle *aigu* tout angle moindre qu'un droit, et tout angle plus grand qu'un droit se nomme angle *obtus*. Ainsi dans la fig. 16, où OD est perpendiculaire sur AB, l'angle COB est un angle obtus, et COA est un angle aigu.

THÉORÈME.

Fig. 16. 51. *Lorsqu'une droite* OC *en rencontre une autre* AB, *la somme des deux angles adjacens* COA *et* COB *est égale à deux angles droits.*

Elevons par le point O la perpendiculaire OD sur AB, ce qui formera les deux angles droits DOA et DOB. Cela posé, l'angle COB se compose des angles COD et DOB : donc la somme des deux angles AOC et COB sera celle même des trois angles AOC, COD et DOB. Mais les deux premiers réunis forment l'angle droit AOD, le troisième DOB est aussi droit : donc enfin la somme des deux angles AOC et COB est égale à celle des deux angles droits AOD et DOB, et par conséquent à celle de deux angles droits quelconques (49).

52. Corollaire I. Si l'un des angles COA et COB est droit, l'autre l'est aussi.

53. Corollaire II. Si une droite OD est perpendiculaire sur une autre AB, réciproquement cette seconde sera perpendiculaire sur la première.

En effet, prolongeons OD au dessous de AB, l'angle AOD est droit par hypothèse (47) : donc son adjacent AOF l'est aussi ; donc AO forme avec DF deux angles adjacens égaux AOD et AOF (49); donc AO est perpendiculaire sur DF.

54. Corollaire III. Puisque l'angle AOF est droit, son adjacent FOB l'est aussi : donc OF est perpendiculaire sur AB; donc *lorsqu'une droite* OD *est perpendiculaire sur une autre* AB, *son prolongement* OF *l'est aussi.*

55. Corollaire IV. La somme de tous les angles IOA, AOB, BOC, formés autour d'un même point et du même côté d'une droite IC, est égale à deux droits : car leur somme est la même que celle des deux angles adjacens IOB et BOC. Fig. 18.

56. Corollaire V. La somme de tous les angles AOB, BOC, COD, DOA, formés autour d'un même point O, est égale à quatre droits. Prolongeons en effet CO en OI, il est évident, d'après le corollaire précédent, que la somme des angles IOA + AOB + BOC + COD + DOI est égale à quatre droits. Mais IOA + DOI = AOD : donc, etc.

57. Lorsque la somme de deux angles est égale à deux angles droits, on dit que chacun d'eux est *le supplément* de l'autre, ou que ces angles sont *supplémentaires.* On voit que *deux angles qui ont le même supplément sont égaux,* puisqu'en leur ajoutant un même angle on obtient la même somme, deux angles droits.

THÉORÈME.

58. *Si deux angles adjacens* COA *et* COB *sont supplémentaires, les côtés extérieurs* AO *et* OB *sont en ligne droite.* Fig. 16.

En effet, si OB n'est pas le prolongement de AO, nous pourrons prolonger celle-ci en OG, et alors, la ligne AOG étant droite, la somme des deux angles adjacens COA et COG vaudra deux droits (51). Mais, par hypothèse, AOC + COB vaut aussi deux droits : donc la somme des deux angles COA et COG est égale à celle des deux angles COA et COB. Retranchant de part et d'autre l'angle commun COA, il restera COG = COB, c'est-à-dire la partie égale au tout, ce qui est absurde : donc on ne pouvait pas supposer que OB n'était pas le prolongement de AO; donc AOB est une ligne droite.

59. Scholie. Lorsque deux propositions sont telles que, le sujet étant le même, l'hypothèse de l'une est précisément le jugement que l'on porte dans l'autre, et *vice versâ*, on dit que l'une est la *réciproque* de l'autre. Ainsi la proposition précédente est la réciproque de celle du n.° 51 : car dans toutes deux la droite OC, qui concourt à former les angles COA et COB, est le sujet ; l'hypothèse et le jugement de la proposition du n.° 51 sont respectivement : AOB *est une ligne droite, et* COA + COB *égale deux droits ;* tandis que l'hypothèse et le jugement de celle du n.° 58 sont au contraire : COA + COB *égale deux droits, et* AOB *est une ligne droite.*

La plupart des réciproques peuvent se démontrer par la réduction à l'absurde de la manière suivante : *exécutez une construction qui réalise l'hypothèse de la proposition directe ; appliquez alors cette proposition, et comparez le jugement qui en résulte à l'hypothèse de votre réciproque. Si le résultat de cette comparaison est absurde, votre réciproque est vraie.*

Ainsi dans la démonstration du n.° 58 nous avons prolongé AO en OG, ce qui a *réalisé* l'hypothèse de la proposition directe : car nous avons eu ainsi une droite OC rencontrant une autre droite AOG ; nous avons alors appliqué la proposition directe, en disant que COA + COG est égale à deux droits ; nous avons comparé ce jugement à l'hypothèse de notre réciproque, savoir : COA + COB est égale à deux droits, et nous en avons *conclu* que COB = COG, ce qui est absurde. Notre réciproque est donc vraie.

THÉORÈME.

Fig. 5. 60. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *se coupent, les angles opposés par le sommet, tels que* AOC *et* BOD, *sont égaux.*

En effet, puisque AOB est une ligne droite, la somme des angles adjacens AOC et COB vaut deux droits ; de même, puisque COD est une ligne droite, la somme des angles adjacens COB et DOB vaut aussi deux droits : donc la somme des angles AOC et COB est égale à celle des angles COB et DOB ; retranchant de chacune l'angle commun COB, il restera AOC = DOB.

THÉORÈME.

61. *Par un point donné on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur une droite donnée.*

Il peut arriver deux cas, selon que le point donné est situé sur la droite donnée, ou hors de cette droite. Le premier cas a été démontré au n.° 48; occupons-nous donc du second.

Je suppose que du point C, pris hors de la droite AB, on puisse abaisser sur cette droite les deux perpendiculaires CD et CI. Je fais tourner la partie supérieure du plan autour de AB comme charnière, jusqu'à ce que le point C soit venu se placer quelque part en C′ sur sa partie inférieure; C′D et C′I seront ainsi les rabattemens de CD et de CI, et par conséquent seront perpendiculaires sur AB : car leurs directions à l'égard de AB n'ont pas changé dans ce mouvement; mais il est alors évident que CDC′ est une ligne droite, sans quoi en prolongeant CD en DO, on aurait par le même point D deux perpendiculaires C′D et OD (54), sur la droite AB, ce qui ne se peut (48). Par la même raison CIC′ est aussi une ligne droite : donc du point C au point C′ on a deux lignes droites, ce qui est absurde (8); donc il n'est pas possible d'abaisser du point C deux perpendiculaires sur AB. Fig. 19.

62. On dit qu'*une droite est* OBLIQUE *à une autre lorsqu'elle la rencontre sans lui être perpendiculaire*. Il suit du n.° précédent que si d'un point C on abaisse une perpendiculaire CD sur AB, toute droite telle que CI, qui, partant du point C, ira rencontrer AB, sera oblique à celle-ci.

THÉORÈME.

63. *Lorsqu'une perpendiculaire* CD *et une oblique* CI *à une droite* AB, *partent du même point* C, *la perpendiculaire est plus courte que l'oblique*.

En effet, faisons tourner la partie supérieure du plan autour de AB comme charnière, jusqu'à ce que le point C vienne se placer quelque part en C′ sur sa partie inférieure; joignons C′D et C′I : ces droites seront les rabattemens de CD et de CI, et ainsi leur seront égales; de plus CDC′ sera une ligne droite, comme nous l'avons démontré dans la proposition précédente : donc CDC′ est plus petite que la brisée CIC′; donc CD, moitié de CDC′, est moindre que CI, moitié de CIC′; ce qu'il fallait démontrer.

64. COROLLAIRE I. *La perpendiculaire, étant la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener d'un point à une*

droite, est la mesure naturelle de la distance de ce point à cette droite.

65. Corollaire ii. *Lorsqu'une droite est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à une droite, elle lui est perpendiculaire,* sans quoi elle ne serait pas la plus courte.

THÉORÈME.

66. *Si une perpendiculaire* CD *et différentes obliques* CA, CB, CI, *à une droite* AB, *partent d'un même point* C, 1.° *les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; 2.° de deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.*

1.° Soit DA = DB, je dis que CA = CB. Plions en effet la figure le long de CD : il est clair que le segment DA viendra tomber sur DB, puisque les angles CDA et CDB, étant égaux (47), sont superposables; et, comme DA = DB, le point A viendra se placer sur le point B; la droite CA, ayant ainsi ses deux extrémités confondues avec celles de CB, coïncidera avec elle dans toute son étendue : donc ces deux droites sont égales.

2.° Supposons DI > DB, je dis que CI est > CB. Plions en effet la figure le long de AB et soient C'D, C'B et C'I, les rabattemens respectifs de CD, CB et CI : CDC' sera une ligne droite, et l'on aura C'B = CB, et C'I = CI. Mais la brisée CIC' est plus grande que la brisée CBC' qu'elle enveloppe (42); donc CI, moitié de CIC', est plus grand que CB, moitié de CBC'. Donc de deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.

67. Corollaire i. Réciproquement, *deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire,* sans quoi l'une serait plus longue que l'autre; et *de deux obliques inégales, la plus longue est la plus éloignée du pied de la perpendiculaire,* sans quoi elle serait ou égale à l'autre ou moindre qu'elle.

68. Corollaire ii. *D'un point donné on ne peut pas mener à une même ligne droite trois droites égales.* En effet, si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur cette droite, il pourra arriver trois cas : 1.° ou la perpendiculaire coïncidera

avec une des trois droites, et alors celle-ci sera plus petite que les deux autres; 2.° ou elle en laissera deux d'un même côté, et ces deux-là seront inégales; 3.° ou elle les laissera toutes les trois d'un même côté, et ainsi elles seront toutes les trois inégales.

THÉORÈME.

69. *Tout point* M *situé sur la perpendiculaire* CD *élevée sur une droite* AB *par son milieu* D, *est également distant des extrémités* A *et* B *de cette droite; et tout point* E *situé hors de cette perpendiculaire est inégalement distant de ces mêmes extrémités.*

1.° Puisque le point D est le milieu de AB, les obliques MA et MB s'écartent également du pied de la perpendiculaire MD: donc elles sont égales.

2.° Tirons du point E les droites EA et EB aux points A et B, et soit M le point où la seconde coupe la perpendiculaire CD: ce point sera donc équidistant de A et de B; de sorte que si l'on joint MA, on aura MA = MB. Or la droite AE est plus courte que la *brisée* EMA (7), et partant que son égale EMB: donc tout point situé hors de la perpendiculaire CD est inégalement distant des points A et B.

70. Corollaire i. Il suit de là que *la perpendiculaire élevée sur une droite par son milieu passe par tous les points équidistans des extrémités de cette droite:* car tous les points de cette perpendiculaire sont également éloignés des deux extrémités de la droite, et ces points sont les seuls du plan qui jouissent de cette propriété. En conséquence on dit que *le* lieu géométrique *de tous les points équidistans de deux points donnés est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint ces deux points.*

71. Corollaire ii. Il suit de ce corollaire et du principe du n.° 24 que *si une droite* CC′ *passe par deux points* C et C′ *équidistans des extrémités* A et B *d'une autre droite* AB, *elle sera perpendiculaire sur le milieu de cette autre:* car si par le milieu de AB on élève une perpendiculaire à cette droite, elle passera par tous les points équidistans de ses extrémités A et B, et par conséquent par les points C et C′ : donc elle aura deux points communs avec la droite CC′; donc elle coïn-

cidera avec cette droite; donc CC' est elle-même cette perpendiculaire élevée sur le milieu de AB.

PROBLÈME.

Fig. 20. 72. *Partager une droite donnée* AB *en deux parties égales par une perpendiculaire.*

La question revient évidemment (71) à trouver deux points également distans des extrémités A et B de la droite donnée. En conséquence, du point A comme centre, et avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, on décrira de part et d'autre de cette ligne deux arcs de circonférence CD, C'D'; puis du point B comme centre, et avec la même ouverture de compas, on décrira pareillement deux nouveaux arcs FG, F'G', qui couperont les premiers aux points M et M'. Ces points seront chacun également distans des points A et B : donc la droite MM' qui les unit est perpendiculaire sur le milieu de AB.

On conçoit très-bien que les deux arcs CD et C'D' doivent se couper. Au reste nous le démontrerons plus tard, et l'on verra alors pourquoi nous avons pris notre ouverture de compas plus grande que la moitié de AB.

Nous avons marqué de part et d'autre de AB les deux points M et M' qui déterminent la perpendiculaire demandée, parce qu'une droite qui doit passer par deux points est d'autant mieux déterminée que ces points sont plus éloignés. On conçoit en effet que si l'on ne plaçait pas l'arète de la règle rigoureusement à égale distance des deux points, la ligne que l'on tracerait dévierait d'autant plus de la droite demandée que les deux points seraient plus près l'un de l'autre.

PROBLÈME.

Fig. 21. 73. *Par un point donné* O *sur une droite* AB, *élever une perpendiculaire sur cette droite.*

Il est clair que si l'on prend de part et d'autre du point O les deux distances égales OC et OD, il ne s'agira plus que d'élever une perpendiculaire sur le milieu de CD, et il suffira pour cela de trouver un point équidistant de C et de D, puisque O jouit déja de cette propriété. En conséquence des points C et D comme centres, et avec une ouverture de compas plus grande que CO, on décrira deux arcs qui se couperont au point G, et en tirant GO, le problème sera résolu.

PROBLÈME.

74. *D'un point* G *donné hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Si l'on prend sur la droite AB un point quelconque D, et que du point G comme centre, avec GD pour rayon, on décrive une circonférence, il est clair qu'elle coupera AB en un second point C (66, 1.°), et le point G sera ainsi également distant de D et de C : donc si sur le milieu de CD on élève une perpendiculaire, elle passera par le point G, ce qui ramène au problème du n.° 72. Remarquons qu'il suffira de marquer un point équidistant de D et de C, puisque G jouit déja de cette propriété.

Si la droite AB n'est pas assez grande pour que l'arc décrit du point G comme centre, avec le rayon GD, puisse la couper en un second point, on prendra sur cette ligne un autre point quelconque A, puis des deux points A et D comme centres, avec les rayons respectifs AG et DG, on décrira au dessous de AB deux arcs qui se couperont en G' : de cette manière les points A et D seront équidistans de G et de G', de sorte que la droite AB sera perpendiculaire sur GG' (71), et réciproquement.

75. Les deux derniers problèmes que nous venons de résoudre se présentent sans cesse dans la pratique des arts, et surtout dans le dessin linéaire : aussi a-t-on cherché à en trouver des solutions plus simples que celles que nous en avons données, et l'on y est parvenu au moyen de l'instrument nommé *équerre*. Il y a plusieurs sortes d'équerres. Celle du charpentier est formée de deux Fig. 22. règles de fer ou de bois réunies invariablement, et de manière que leurs arètes se coupent à angle droit. L'équerre du dessinateur est une petite planchette ABC, terminée par trois côtés Fig. 23. AB, AC et BC parfaitement dressés, dont deux forment un angle droit. Pour mener une perpendiculaire sur une droite donnée DF, par un point E, on place l'équerre de manière que Fig. 24. l'une des arètes qui forment l'angle droit coïncide avec la droite EF, et que le sommet de cet angle soit au point E : alors, en traçant une ligne le long de l'autre côté, on obtient la perpendiculaire demandée.

76. Ce procédé serait parfait si l'équerre dont on se sert était

bien juste; mais rien n'est plus rare qu'une bonne équerre. Il faut donc, avant d'employer cet instrument, le vérifier avec le plus grand soin. Pour cela, tirez très-exactement sur un plan une ligne droite DEF; placez ensuite le côté AB de l'équerre sur EF, et tracez EG le long de AC. Cela fait, renversez votre équerre de manière que AC vienne se placer sur ED, le sommet A restant toujours en E : si le second côté AB tombe juste sur la ligne déja tracée EG, c'est une preuve que les angles GED et GEF sont égaux entre eux, puisqu'ils le sont à BAC, et l'équerre est *bonne.* Si AB, dans sa nouvelle position, tombe à gauche ou à droite de EG, le double de GEF, et par conséquent de BAC, est plus petit ou plus grand que deux angles droits; ainsi l'angle BAC est aigu ou obtus, et l'équerre est *fausse.*

77. Si l'on a une perpendiculaire à tracer sur le terrain, et qu'elle ne doive pas être bien longue, on y parviendra par les méthodes données aux n.os 72, 73 et 74, en employant un cordeau au lieu d'un compas; ou bien encore on attachera aux extrémités de la droite sur le milieu de laquelle la perpendiculaire doit tomber, un cordeau au milieu duquel on aura fixé un anneau; puis, tendant le cordeau au moyen de cet anneau, son milieu viendra se placer sur la perpendiculaire demandée. Répétant cette opération de l'autre côté de la droite, on obtiendra un second point de la perpendiculaire, et sa direction sera déterminée.

Ce procédé s'appliquerait également bien au cas où la perpendiculaire devrait partir d'un point pris sur la droite donnée ou hors de cette droite.

Lorsque la perpendiculaire doit avoir une grande longueur, on la trace au moyen de l'équerre d'arpenteur ou du graphomètre, instrumens avec lesquels on peut atteindre une grande précision, et que nous décrirons plus tard.

THÉORÈME.

Fig. 25. 78. *Deux perpendiculaires* AB, CD *à une même droite* FG *ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.*

Car si elles se rencontraient, on pourrait de leur point d'intersection abaisser deux perpendiculaires sur la même droite FG, ce qui est absurde (61). Deux pareilles droites sont dites *parallèles.*

79. *On appelle donc parallèles deux droites qui, situées sur un même plan, ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge: ainsi deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

THÉORÈME.

80. *Une perpendiculaire quelconque* AB *à une droite* DG *est rencontrée par toutes les obliques à cette droite.* Fig. 26.

Soit CF une oblique quelconque à DG. L'un des deux angles DFC et CFG est nécessairement aigu: supposons que ce soit ce dernier; je dis alors que FC, prolongée suffisamment, rencontrera BA. Elevons en effet au point F la perpendiculaire FK sur FG : elle passera à gauche de FC, et formera avec elle l'angle aigu KFC. Cela posé, si l'on fait tourner cet angle alternativement autour de ses deux côtés, en commençant par FC, il est clair qu'après un certain nombre de révolutions il sortira de l'angle droit KFG: ainsi en répétant l'angle KFC un certain nombre de fois, on obtient un angle plus grand que le droit KFG. Mais si l'on répète la bande rectangulaire KFBA le même nombre de fois, en la faisant tourner alternativement autour de ses deux côtés parallèles AB et KF, on ne remplira qu'une partie de l'angle droit KFG, puisque le côté FG est indéfini (*a*): donc l'angle KFC est plus grand, et même est infiniment plus grand que la bande KFBA; et, comme ces deux espaces ont pour limite commune le côté FK, il faut nécessairement que FC aille couper AB, sans quoi l'angle KFC serait contenu dans la bande KFBA, et serait par conséquent plus petit qu'elle.

Remarquons que si FC rencontre BA, l'angle KFC sera bien réellement plus grand que la bande KFBA: car ces deux espaces auront la partie commune KFOA, et la partie restante AOI de l'angle surpasse la partie restante FOB de la bande, puisque celle-ci est finie, tandis que l'autre est infinie.

THÉORÈME.

81. *Par un point donné* C *on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée* AB. Fig. 27.

(*a*) Dans le mouvement de révolution de la bande, l'angle droit ABF doit s'appliquer sur son égal ABG : ainsi BF vient tomber sur BG, et le point F en F', à une distance BF' de B, égale à BF; le côté KF se place donc en K'F' perpendiculairement à FG, et ainsi de suite.

En effet, abaissons du point C une perpendiculaire CD sur la droite AB. Cela posé, de toutes les droites que l'on peut mener par le point C, une seulement sera perpendiculaire à CD, et les autres lui seront obliques; la perpendiculaire à CD sera parallèle à AB (78 et 79), et les autres rencontreront cette droite (80): donc par le point C on ne peut mener qu'une seule parallèle à AB.

THÉORÈME.

Fig. 25. 82. *Lorsque deux droites* AB, CD, *sont parallèles, toute perpendiculaire* FG *sur l'une d'elles* AB *l'est aussi sur l'autre* CD.

D'abord FG rencontrera CD, sans quoi elle lui serait parallèle, et l'on aurait ainsi par le point F deux parallèles FG et AB à CD, ce qui ne se peut (81). En second lieu, FG sera perpendiculaire à CD, sans quoi elle lui serait oblique, et réciproquement CD serait oblique à FG: donc alors CD irait rencontrer AB perpendiculaire à FG (80), ce qui est absurde, puisque AB et CD sont supposées parallèles: donc FG est perpendiculaire à CD.

THÉORÈME.

Fig. 28. 83. *Deux droites* AB *et* CD, *parallèles à une troisième* FG, *sont parallèles entre elles.*

Car si l'on élève une perpendiculaire MN sur FG, elle le sera aussi sur ses parallèles AB et CD (82): donc celles-ci seront ainsi perpendiculaires à une même droite MN, et par conséquent parallèles (79).

THÉORÈME.

Fig. 29. 84. *Deux parallèles* AB *et* CD *sont partout équidistantes.*

Il s'agit de prouver que deux points quelconques P et Q de l'une d'elles AB sont à la même distance de l'autre. Abaissons donc des points P et Q des perpendiculaires PR et QS sur CD, et démontrons qu'elles sont égales (64). Pour cela, du point M, milieu de PQ, j'abaisse MN perpendiculaire sur CD; cette droite l'est aussi sur AB (82), et ainsi les angles en M sont droits: donc, si l'on replie la figure le long de MN, les droites MB et ND viendront se rabattre respectivement sur MA et sur NC, et par conséquent les points Q et S iront tomber sur ces droites; mais MQ = MP: donc le point Q se placera sur le point P. Or les angles P et Q sont droits, comme les angles en M: donc, puis-

qu'ils ont déja le côté commun PM, il faudra que QS prenne la direction de PR, et qu'ainsi le point S aille tomber sur cette droite. Mais il doit déja se trouver sur NC : donc il se placera nécessairement au point R d'intersection de ces droites. QS a donc ses extrémités confondues avec celles de PR : donc ces deux droites coïncident dans toute leur étendue; donc elles sont égales, ce qui démontre notre théorème.

85. Lorsque deux droites AB et CD sont coupées par une troisième FK, elles forment avec elle différens angles auxquels on a donné des noms particuliers. Fig. 30.

On appelle ANGLES INTERNES OU EXTERNES *des angles dont l'ouverture est entre les droites* AB et CD, *ou hors de ces droites.* AGK est un angle interne; AGF est un angle externe.

Deux angles internes ou externes, situés de différens côtés de la sécante FK, *et dont les côtés sont dirigés en sens contraires, se nomment angles alternes-internes ou alternes-externes.* AGK et FID sont deux angles alternes-internes. D'abord ce sont des angles internes; ensuite l'un est situé à gauche de la sécante FK, et l'autre l'est à sa droite; enfin les côtés GA et GK du premier sont évidemment dirigés en sens contraires des côtés ID et IF du second. FGB et CIK sont deux angles alternes-externes.

On appelle *angles correspondans deux angles situés d'un même côté de la sécante, et dont les côtés sont dirigés dans le même sens.* Tels sont les angles FGB et FID.

THÉORÈME.

86. *Lorsque deux parallèles* AB *et* CD *sont coupées par une sécante* FK,

1.° *Les angles alternes-internes sont égaux;*

2.° *Les angles alternes-externes sont égaux;*

3.° *Les angles correspondans sont égaux;*

4.° *Les angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires;*

5.° *Les angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.*

1.° et 2.° Par le milieu O de la portion de la sécante comprise entre les parallèles, menons MN parallèle à AB : elle le sera aussi à CD (83). Puis, faisant faire une demi-révolution à la

partie FNK du plan, amenons ON sur OM : alors OK ira tomber sur OF à cause de l'égalité des angles NOK et FOM (60); et, comme OI=OG, les points I et G de la partie FNK du plan se trouveront respectivement en G et en I. Mais les droites GB et ID n'auront pas cessé d'être parallèles à ON : donc elles le seront actuellement à OM, et par conséquent coïncideront avec IC et GA, sans quoi, par un même point I ou G, on aurait deux parallèles à une même droite OM (81) : donc les angles BGK et DIF recouvriront leurs alternes-internes FIC et AGK ; et les angles BGF et DIK recouvriront aussi leurs alternes-externes CIK et FGA. Donc 1.° et 2.° les angles alternes-internes ou alternes-externes sont égaux.

3.° Je dis maintenant que les angles correspondans AGK et CIK, par exemple, sont égaux. En effet l'angle CIK est égal à FID, son opposé par le sommet ; mais celui-ci est égal à son alterne-interne AGK ; donc les deux angles AGK et CIK, égaux à un troisième FID, sont égaux. Donc 3.° les angles correspondans sont égaux (*a*).

4.° Soient les deux angles internes d'un même côté AGK et CIF. L'angle CIF a pour supplément son adjacent FID (51 et 57) ; mais FID est égal à son alterne-interne AGK ; donc CIF a aussi pour supplément AGK. Donc 4.° les angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

5.° Considérons enfin deux angles externes d'un même côté, AGF et CIK. Celui-ci a pour supplément son adjacent CIF, et par conséquent AGF, le correspondant de CIF. Donc 5.° les

---

(*a*) Cette démonstration prouve invinciblement que les angles AGK et CIK sont superposables, et par conséquent égaux ; et cependant l'angle AGK se compose de l'angle CIK et de la bande AGIC. Pour éclaircir cette difficulté, nous observerons que si l'on prend sur GK les distances II', I'I'',...... toutes égales à GI, et que par les points I', I'',..... on mène des parallèles à CI, toutes les bandes CII'C', C'I'I''C'',...... seront égales à AGIC : car le raisonnement par lequel nous avons démontré l'égalité des angles alternes-internes et alternes-externes prouve que les espaces AGIC et BGID sont égaux, et l'on verrait de même que BGID=CII'C'. Or, quelque nombreuses que soient ces bandes, c'est-à-dire quel que soit le nombre de fois que l'on répète la bande AGIC, jamais on n'obtiendra un espace équivalent à l'angle AGK : donc cette bande est une quantité infiniment petite par rapport à cet angle, de même que par rapport à l'autre angle CIK ; donc elle doit être négligée vis-à-vis de chacun d'eux ; et, comme elle est leur différence, on doit en conclure que ces angles sont bien réellement égaux.

angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

THÉORÈME.

87. Réciproquement, *lorsque les angles alternes-internes, ou alternes-externes, ou correspondans, sont égaux; ou bien encore lorsque les angles internes ou externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires, les droites qui les forment par leur intersection avec la sécante sont parallèles.*

Supposons, par exemple, que les angles alternes-internes AGK et DIF soient égaux : je dis que les droites AB et CD sont parallèles. En effet, si CD n'est point parallèle à AB, nous pourrons toujours mener, par le point I, RS, parallèle à AB, et alors les angles alternes-internes AGK et RIF seront égaux; mais AGK est égal par hypothèse à DIF : donc les deux angles RIF et DIF, égaux à un troisième AGK, sont égaux entre eux, ce qui est absurde. Donc on ne peut pas supposer que CD ne soit pas parallèle à AB : donc ces deux droites sont parallèles.

On démontrerait de la même manière les autres cas en suivant, comme nous venons de le faire, le précepte du n.° 59.

THÉORÈME.

88. *Deux angles sont égaux lorsqu'ils ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens contraires.*

Soient d'abord les deux angles ABC, DFG, qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Prolongeons DF jusqu'à sa rencontre avec CB au point I. Les deux angles ABC, DIC, sont égaux comme correspondans par rapport aux parallèles AB et DI et à la sécante BC; mais DIC est aussi égal à DFG (86, 3.°) : donc les deux angles ABC, DFG, égaux à un troisième DIC, sont égaux entre eux. Fig. 31.

Considérons maintenant les deux angles ABC, OFK, qui ont les côtés parallèles et dirigés en sens contraires. Ces deux angles sont égaux : car OFK est égal à DFG, son opposé par le sommet, et nous venons de voir que celui-ci est égal à ABC.

THÉORÈME.

89. *Lorsque deux angles* ABC, DFO, *ont leurs côtés parallèles, et que deux de ces côtés* AB *et* DF *sont dirigés dans*

le même sens, et les deux autres BC *et* FO *en sens contraires, ces angles sont supplémentaires.*

En effet l'angle DFO est le supplément de son adjacent DFG, et DFG est égal à ABC.

90. Corollaire. *Deux angles qui ont les côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

THÉORÈME.

Fig. 52. 91. *Deux angles* ABC, DFG, *qui ont leurs côtés* AB *et* DF, BC *et* FG, *perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.*

Menons, par le point B, BI et BK, perpendiculaires respectivement à AB et à BC : la somme des deux angles IBK et KBA forme l'angle droit IBA; la somme des deux angles KBA et ABC forme aussi un angle droit KBC : donc ces deux sommes sont égales; retranchant de part et d'autre l'angle commun KBA, il restera IBK = ABC. Mais les angles IBK et DFG sont égaux ou supplémentaires, puisque leurs côtés sont parallèles (90) : donc aussi les angles ABC et DFG sont égaux ou supplémentaires.

92. Scholie. Lorsque la somme de deux angles est un angle droit, on dit que chacun est le *complément* de l'autre, ou qu'ils sont *complémentaires.* On voit que deux angles qui ont le même complément sont égaux (57).

PROBLÈME.

Fig. 53. 93. *Par un point donné* C *mener une parallèle à une droite donnée* AB.

Les propriétés des n.os 79 et 87 fournissent différentes solutions de ce problème; mais nous ne pouvons indiquer ici que les deux suivantes (130).

1.o Du point C abaissez CD, perpendiculaire sur AB (74, 77), puis élevez, au point C, CF, perpendiculaire sur CD (73, 77) : CF résoudra le problème (79).

Fig. 54. 2.o Placez sur AB l'un des côtés d'une équerre de dessinateur PRQ, le grand côté PQ, par exemple, et appliquez une règle le long de l'un quelconque PR des deux autres côtés; puis, la maintenant invariablement dans cette position, faites glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que le grand côté vienne passer par le point C : alors la ligne CD, tracée le long de P'Q', résoudra le problème : car les angles correspondans R'P'Q' et RPQ sont évidemment égaux.

94. Le principe du n.° 84, ou plutôt sa réciproque, fournit aux menuisiers et aux ébénistes un procédé facile pour mener une parallèle à une droite donnée, au moyen de l'instrument appelé *trusquin*. C'est une règle AB portant à son extrémité A une pointe à tracer, et qui traverse une petite planche carrée dressée avec soin, en passant dans une mortaise où on la fixe avec un coin en bois, de sorte que l'on peut amener la pointe à tracer à telle distance que l'on veut de la planchette. Or il est clair que si l'on fait glisser celle-ci le long d'une face plane CDEF, la pointe tracera sur la face CDIK une ligne dont tous les points seront à la même distance de l'arète CD, et qui sera par conséquent une droite parallèle à cette arète. Considérons, en effet, deux points quelconques M et O de cette ligne, et imaginons par le point M une parallèle à CD : elle passera nécessairement par le point O, sans quoi ce point ne serait pas à la même distance de CD que le point M (84). Donc notre parallèle passera par tous les points de la ligne tracée par la pointe; donc cette ligne est parallèle à CD. Fig. 53.

Le tracé des parallèles est une opération qui se présente continuellement dans la pratique des arts. Ainsi les pièces de menuiserie et de charpente, les pierres de taille, sont le plus souvent terminées par des droites parallèles; dans le tissage des étoffes, on dispose les fils qui doivent former la chaîne de manière qu'ils soient rigoureusement parallèles et également espacés; et c'est à cela que tient surtout la beauté des tissus; les rails des routes en fer doivent être équidistans dans tous les points, puisque les roues dans les gorges desquelles ils entrent sont invariablement à égale distance l'une de l'autre : si donc l'une des deux ornières est droite, l'autre doit lui être parfaitement parallèle, etc., etc.

CHAPITRE III.

DE LA CIRCONFÉRENCE.

95. Nous avons vu au n.° 20 ce qu'on entendait par les mots *circonférence*, *rayon*, *diamètre* et *arc*.

Nous appelons CORDE *ou* SOUS-TENDANTE *d'un arc la droite*

qui unit ses extrêmités. Nous verrons au n.° 106 pourquoi on
Fig. 56. a donné à cette droite le nom de sous-tendante. AB est la corde de l'arc AMB.

THÉORÈME.

96. *Deux circonférences décrites avec le même rayon sont égales.*

Car si l'on place le plan de la seconde circonférence sur celui de la première, de manière toutefois que les deux centres ne fassent qu'un seul point, les deux circonférences coïncideront, sans quoi tous leurs points ne seraient pas également éloignés du centre. *Les cercles de même rayon sont donc aussi égaux* (20).

THÉORÈME.

97. *Le diamètre est la plus grande des cordes que l'on puisse tirer d'un point de la circonférence à un autre.*

Considérons, en effet, la corde AB et le diamètre AC issus du même point A de la circonférence, et joignons le point B avec le centre O. La corde AB est évidemment plus petite que la brisée AOB; mais celle-ci est égale à AC: car l'une et l'autre sont la somme de deux rayons: donc la corde AB est plus courte que le diamètre AC.

THÉORÈME.

98. *Tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales.*

Si l'on plie, en effet, la figure le long du diamètre AC, il faudra nécessairement que tous les points de l'arc ANC viennent se placer sur ceux de AMC, sans quoi tous les points de la circonférence ne seraient pas également éloignés du centre O, puisque dans le mouvement de l'arc ANC leur distance à ce centre n'a point pu varier.

THÉORÈME.

Fig. 57. 99. *Trois points A, B, C qui ne sont pas en ligne droite déterminent une circonférence.*

Il s'agit de démontrer que par ces trois points on peut faire passer une circonférence, mais qu'on ne peut en faire passer qu'une.

Pour le prouver, je joins AB et BC; puis j'élève sur ces droites, et par leurs milieux, les perpendiculaires respectives DE et FG, et je dis que ces perpendiculaires se rencontreront. En

effet, si elles ne se rencontraient pas, elles seraient parallèles (79) : donc AB, qui est perpendiculaire sur DE, le serait aussi sur FG (82); mais déja BC est perpendiculaire sur FG : donc il y aurait deux perpendiculaires AB et BC abaissées du même point B sur la même droite FG, ce qui est absurde (61), puisque les trois points A, B, C, n'étant pas en ligne droite, AB et BC sont deux droites distinctes. DE et FG se rencontreront donc en un certain point O. Or ce point, appartenant à la perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de AB, est également éloigné de ses extrémités A et B (69); comme appartenant à FG, il est équidistant de B et de C : donc les trois distances OA, OB et OC sont égales; donc la circonférence décrite du point O comme centre avec le rayon OA, passera par les trois points A, B, C.

Remarquez que la perpendiculaire élevée sur le milieu de AC passerait par le point de section O des deux autres (70).

Concluons que l'on peut toujours décrire une circonférence par trois points situés non en ligne droite. Je dis de plus qu'on ne peut en faire passer qu'une.

Supposons, en effet, qu'on puisse faire passer une seconde circonférence par les trois points A, B, C. Son centre sera nécessairement sur la perpendiculaire DE, sans quoi il ne serait pas également distant des points A et B (69). Par la même raison il doit se trouver sur la perpendiculaire FG : donc il ne peut se trouver qu'à leur point de section O; donc la seconde circonférence a le même centre et le même rayon que la première; donc elle coïncide avec elle; donc il n'y a qu'une circonférence qui puisse passer par les trois points A, B, C; donc trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent une circonférence.

100. Scolie I. Si les trois points A, B, C, étaient en ligne droite, les deux perpendiculaires DE et FG seraient parallèles (79), et ainsi elles ne se rencontreraient pas. Or nous avons prouvé tout-à-l'heure que le centre de la circonférence qui passerait par les trois points A, B, C, devait se trouver à la fois sur les deux perpendiculaires DE et FG : donc *il est impossible qu'une circonférence puisse être coupée en plus de deux points par une ligne droite;* et en effet, si la chose était possible, on n'aurait qu'à joindre trois de ces points avec le centre, et l'on aurait ainsi trois droites égales menées d'un même point à une même droite, ce qui est absurde (68).

101. SCHOLIE II. La construction que nous avons faite pour la démonstration de la proposition précédente fournit une solution de ce problème : *Par trois points* A, B, C, *qui ne sont pas en ligne droite, faire passer une circonférence.*

THÉORÈME.

Fig. 58. 102. *La perpendiculaire* OM, *abaissée du centre* O *d'une circonférence sur une corde quelconque* AB, *divise cette corde et les arcs sous-tendus, chacun en deux parties égales.*

Joignons en effet OA et OB : ces deux droites seront égales comme rayons, et partant obliques sur AB (61 et 63) : donc elles s'écartent également du pied I de la perpendiculaire OM (67) : donc ce pied est le milieu de AB.

Si maintenant on plie la figure le long du diamètre M'OM, les deux demi-circonférences se recouvriront ; mais, à cause de l'égalité des angles OIB et OIA, le côté IB doit aller se placer sur le côté IA ; et comme IB = IA, le point B tombera sur le point A : donc les arcs BM et AM se recouvriront, ainsi que les arcs BM' et AM' ; donc ces arcs sont égaux.

103. SCHOLIE. *La perpendiculaire abaissée du centre sur une corde satisfait donc aux cinq conditions suivantes : 1.° passer par le centre ; 2.° être perpendiculaire à la corde ; 3.° passer par son milieu ; 4.° et 5.° passer par les milieux des deux arcs sous-tendus par cette corde.* Or nous avons vu aux n.os 25 et 61 que deux quelconques de ces conditions suffisent pour déterminer une droite : donc *toute droite qui satisfera à ces deux conditions satisfera aussi aux trois autres.* Ainsi, par exemple, *la* PERPENDICULAIRE *élevée sur le* MILIEU *d'une corde passe par le* CENTRE *et par les* MILIEUX *des arcs sous-tendus par cette corde.*

Fig. 59. 104. COROLLAIRE I. *Pour diviser un arc* AMB *en deux parties égales, élevez une perpendiculaire sur le milieu de sa corde, et le point* M *où elle rencontrera l'arc en sera le milieu.* On pourra ensuite diviser de la même manière chaque moitié en deux parties égales ; puis chacune de ces nouvelles parties en deux parties égales, et ainsi de suite ; de sorte que *l'on saura ainsi diviser un arc* en 2, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, etc., parties égales, c'est-à-dire *en un nombre de parties qui soit une puissance parfaite de* 2.

105. Corollaire ii. *Pour trouver le centre d'un arc, tirez deux cordes quelconques, et élevez des perpendiculaires sur les milieux de ces cordes. Leur point d'intersection résoudra le problème.*

106. Corollaire iii. *Tous les points d'une corde sont intérieurs à la circonférence :* car les droites qui joindront ces points avec le centre seront des obliques à AB, qui s'écarteront moins du pied de la perpendiculaire OI que ne le font les deux rayons OA et OB : donc elles seront plus petites que ces rayons; donc leurs pieds seront intérieurs à la circonférence. Fig. 38.

107. *Une corde indéfiniment prolongée se nomme* SÉCANTE. Ainsi CABF est une sécante. Fig. 40.

Si l'on conçoit que la sécante CABF tourne autour d'un de ses points, A, par exemple, de manière qu'elle tende à sortir de la circonférence, les deux points d'intersection A et B se rapprocheront sans cesse, et finiront par venir coïncider. On dira alors que la sécante CF est devenue *tangente*. Ainsi *la* TANGENTE *est une sécante dont on a fait coïncider les deux points d'intersection en la faisant tourner autour d'un de ses points.*

THÉORÈME.

108. *La tangente* TT', *en un point quelconque* A *de la circonférence, est perpendiculaire sur le rayon* OA *mené au point de contact.*

Tirons en effet par le point A une sécante quelconque CABF. Lorsque cette sécante tournera autour du point A, la droite OI, qui joint le centre avec le milieu de la corde interceptée par la circonférence, tournera aussi autour de ce centre, en restant toujours perpendiculaire à la sécante (103) : donc à la limite, c'est-à-dire quand la sécante sera devenue la tangente TAT', cette droite de jonction lui sera encore perpendiculaire; mais alors le milieu de la corde sera le point A lui-même : donc, etc. (*a*).

109. Corollaire i. Il suit de là que, *par un point pris sur*

(*a*) On peut dire encore : En vertu de la remarque du n.° 100, tous les points d'une tangente sont, à l'exception du point de contact, extérieurs à la circonférence ; par conséquent la ligne la plus courte que l'on puisse mener du centre O à la tangente TT' est le rayon OA : donc ce rayon est perpendiculaire sur cette tangente (65).

la circonférence, on ne peut lui mener qu'une seule tangente (48).

110. Corollaire ii. *Les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles* (79).

111. Corollaire iii. Réciproquement, *si deux tangentes* TAT' et SKS' *sont parallèles, la droite* AK, *qui joint les points de contact, sera un diamètre.*

Car si l'on joint le centre O avec les points de contact, A et K, les droites OA et OK seront perpendiculaires sur les tangentes respectives TT' et SS' (108): donc, puisque ces tangentes sont parallèles, OA sera aussi perpendiculaire sur SS' (82); donc elle coïncidera avec OK; donc AOK est une ligne droite.

112. Corollaire iv. Toute droite FAC menée par le point de contact A est une sécante: en effet cette droite est oblique sur OA (48); donc si du centre on abaisse une perpendiculaire OI sur FC, cette perpendiculaire sera différente de OA; et parconséquent moindre qu'elle; donc le point I est intérieur à la circonférence.

113. Corollaire v. D'où il suit que *toute droite qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence, lui est tangente en ce point.*

THÉORÈME.

114. Réciproquement, *toute perpendiculaire* TAT' *élevée à l'extrémité* A *d'un rayon* OA *est tangente à la circonférence.*

On démontrera facilement cette réciproque en appliquant la règle du n.o 59 (*a*).

115. Corollaire. *Pour mener une tangente à une circonférence par un point* A *de cette circonférence, menez le rayon* OA, *et élevez au point* A *une perpendiculaire sur ce rayon.*

(*a*) Si l'on veut démontrer cette réciproque directement, on dira: Si l'on joint le centre O avec un point quelconque D de TAT', par la droite OD, cette droite sera plus longue que OA (61 et 63): donc le point D est hors de la circonférence; mais c'est un point quelconque de TAT' : donc tous les points de cette droite, à l'exception de A, sont extérieurs à la circonférence: donc cette droite lui est tangente en A (113).

PROBLÈME.

116. *Décrire une circonférence qui touche la droite* AB *au point* C, *et qui passe en outre par le point* D. Fig. 41.

Le lieu géométrique des centres des circonférences tangentes à la droite AB au point C est la perpendiculaire F'F élevée par ce point sur cette droite (108) : donc le centre de la circonférence demandée est sur FF' ; il doit aussi se trouver sur la perpendiculaire G'G élevée sur le milieu de CD (70 ou 103) : donc il est à leur point d'intersection O ; décrivant donc une circonférence du point O comme centre avec le rayon OA, on aura résolu le problème (69 et 112).

Ce problème n'admet qu'une solution, puisque, les deux droites FF' et GG' ne pouvant avoir qu'un seul point d'intersection, on n'obtient ainsi qu'un seul centre, et partant qu'un seul rayon. Il serait impossible si le point D était donné sur la droite AB : car alors les perpendiculaires FF' et GG' seraient parallèles (79). Dans tout autre cas il sera possible.

THÉORÈME.

117. *Les arcs interceptés entre deux cordes* AB, CD, *parallèles, ou entre une corde* AB *et une tangente* TT' *parallèles, sont égaux.* Fig. 42.

1.° J'abaisse du centre O la perpendiculaire OI sur AB : elle le sera aussi sur sa parallèle CD, et par conséquent le point I sera le milieu des arcs AIB et CID (102). Ainsi AI = IB et CI = ID : donc l'arc AC, différence des arcs AI et IC, est égal à l'arc DB, différence des arcs IB et ID qui sont respectivement égaux aux deux précédens.

2.° Je joins le centre O avec le point I de contact. La droite OI sera ainsi perpendiculaire sur la tangente TT', et par conséquent sur sa parallèle AB : donc le point I est le milieu de l'arc AIB ; donc les arcs AI et IB, interceptés entre la corde AB et la tangente TT', sont égaux.

118. Scholie. La réciproque se démontrerait facilement par la règle du n.° 59 ou directement ; mais pour qu'elle soit vraie dans le cas de deux cordes, il faut que ces cordes ne se coupent pas dans la circonférence.

THÉORÈME.

119. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux*, 1.° *deux arcs égaux* AMB, CND *sont sous-tendus par des cordes égales* AB, CD; 2.° *de deux arcs inégaux* AMB, CNF, *le plus grand*, CNF, *est sous-tendu par la plus grande corde* CF. (Quand nous parlerons de l'arc sous-tendu par une corde, il s'agira toujours du plus petit des deux qu'elle sous-tend.)

Fig. 43. 1.° Supposons que les deux arcs égaux AMB, CND, appartiennent à la même circonférence; prenons le milieu L de l'arc AC, et tirons le diamètre LOQ. Si maintenant nous faisons tourner la demi-circonférence LNQ autour de LQ, jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre sur LMQ, il est clair que ces deux demi-circonférences coïncideront parfaitement, sans quoi il y aurait des points inégalement éloignés du centre : donc le point C viendra se rabattre sur A; et, comme l'arc CND est égal à l'arc AMB, le point D ira de même se placer sur B. Les deux cordes CD et AB auront donc leurs extrémités confondues : donc elles coïncideront dans toute leur étendue; donc elles sont égales.

Fig. 44. 2.° Supposons que les arcs AMB, CNF, appartiennent à deux circonférences égales. Tirons les diamètres AG et CK, et portons la seconde circonférence sur la première en faisant coïncider ces diamètres : elles coïncideront elles-mêmes; et, comme CNF $>$ AMB, le point F ira se placer en F' entre B et G, et la corde CF aura pris la position AF'. Joignons OF' et OB : ce dernier rayon coupera AF' entre A et F' (c'est là ce qui exprime que CNF $>$ AMB). Or les droites AB et OF' sont plus petites que les brisées respectives AI + IB et OI + IF'. Donc

$$AB < AI + IB,$$
$$OF' < OI + IF';$$

donc leur somme est aussi plus petite que celle de ces brisées; ainsi

$$AB + OF' < AI + IB + OI + IF';$$

Mais IB + OI = OB (106), et AI + IF' = AF' : donc

$$AB + OF' < OB + AF'.$$

Retranchant d'une part OF', et de l'autre son égal OB, il restera AB $<$ AF' ou que CF, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

120. Réciproquement *deux cordes égales* AB *et* CD *sous-tendent des arcs égaux* AMB *et* CND. *De deux cordes inégales* AB *et* CF, *la plus grande* CF *sous-tend le plus grand arc.* Fig. 45.

1.° En effet, si l'arc AMB n'était pas égal à l'arc CND, le plus grand des deux serait sous-tendu par la plus grande corde, et ainsi AB ne serait pas égal à CD.

2.° Si l'arc CNF n'est pas plus grand que AMB, il lui sera égal ou il sera plus petit que lui; mais dans le premier cas la corde CF serait égale à AB, et dans le second elle serait plus petite qu'elle, résultats contraires à l'hypothèse. Donc l'arc CNF $>$ AMB.

121. Corollaire. *Pour prendre sur une circonférence un arc égal à un autre arc* AMB *de cette circonférence, ou d'une circonférence égale, portez sur la circonférence dont il s'agit une ouverture de compas égale à la corde de l'arc donné* AMB.

122. Scholie. En généralisant la méthode de démonstration que nous venons d'employer tout à l'heure (120), nous établirons la règle suivante, qui trouvera quelquefois son application dans la démonstration des réciproques.

Supposez faux le principe que vous voulez établir, et faites successivement toutes les hypothèses qui lui sont contradictoires. Examinez les conséquences qui en résultent d'après les théorèmes précédens; et si ces conséquences ne peuvent s'accorder avec l'hypothèse sur laquelle est établie votre réciproque, vous conclurez que cette réciproque est vraie.

Nous avons déja fait usage de ce moyen de démonstration au n.° 67.

THÉORÈME.

123. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux deux cordes égales* AB, CD, *sont également éloignées du centre; et de deux cordes inégales* AB, CF, *la plus grande* CF *est la plus près du centre.*

Nous supposerons que les cordes soient tracées dans la même circonférence. Abaissons du centre O les perpendiculaires OG,

OI, OK sur les cordes respectives AB, CD et CF, et il s'agira de prouver que OG = OI, et que OK < OG (64).

1.° Employez le même tour de démonstration que dans le premier paragraphe du n.° 119, et vous conclurez la coïncidence des deux perpendiculaires OG et OI du théorème du n.° 61.

2.° Puisque la corde CF est plus grande que AB, l'arc CNF est plus grand que AMB, et ainsi l'on pourra prendre sur cet arc une *partie* CND égale à AMB. Joignez CD, et abaissez sur cette corde la perpendiculaire OI, qui coupe CF en H : on a évidemment OK < OH. Mais, comme le point I est au dessus du point H, sans quoi la corde CD ne pourrait aller se terminer en D qu'en coupant CF en un autre point que C, on a aussi OH < OI : donc à plus forte raison OK est-il plus petit que OI. Mais OI = OG, puisque les cordes AB et CD sont égales : donc enfin OK < OG.

THÉORÈME.

124. Réciproquement, *dans le même cercle ou dans des cercles égaux deux cordes également éloignées du centre sont égales, et de deux cordes inégalement éloignées du centre, celle qui en est la plus près est la plus grande.*

Appliquez la règle du n.° 122.

THÉORÈME.

125. *Dans la même circonférence ou dans des circonférences égales les angles au centre (on appelle ainsi ceux*
Fig. 45. *qui ont leur sommet au centre)* AOB, COD, *qui comprennent des arcs égaux* AB *et* CD *entre leurs côtés, sont égaux.*

Par le milieu I de l'arc AC menez le diamètre IK, et pliez ensuite la figure le long de ce diamètre : il est clair que de cette manière le point A viendra se placer en C, et le point B en D, puisque nous supposons l'arc AB = CD. L'angle AOB recouvrira donc exactement l'angle COD, et par conséquent ces angles sont égaux (45).

THÉORÈME.

126. Réciproquement, *dans la même circonférence ou dans des circonférences égales, si deux angles au centre* AOB *et* COD *sont égaux, les arcs* AB *et* CD *compris entre leurs côtés sont aussi égaux.*

On démontrera cette réciproque d'après la règle du n.° 59, ou bien on pourra imiter la démonstration de la proposition directe.

127. Corollaire. *Un angle droit dont le sommet est au centre intercepte entre ses côtés un quart de la circonférence ou un* quadran. Réciproquement *si un angle au centre* AOB *comprend un quadran entre ses côtés, cet angle sera droit :* car si l'on prolonge le côté AO, on formera un angle BOC = AOB, puisque BC sera nécessairement un quadran; donc ces deux angles sont droits. Fig. 46.

PROBLÈME.

128. *Au point* A *de la droite* AB *menez une droite qui fasse avec* AB *un angle égal à l'angle donné* C. Fig. 47.

Du sommet de l'angle C, et avec un rayon quelconque, je décris entre ses côtés l'arc MN; puis du point A comme centre, et avec le même rayon, je décris, à partir de la droite AB, l'arc PQ, sur lequel je porte de P en D une ouverture de compas égale à la corde de l'arc MN; je joins AD, et l'angle DAB est égal à NCM : car ce sont des angles au centre qui interceptent des arcs égaux dans deux circonférences égales (125).

PROBLÈME.

129. *Diviser un angle donné* AOB *en deux parties égales.* Fig. 59.

Du sommet O comme centre, et avec un rayon arbitraire AO, décrivez entre les côtés de l'angle donné l'arc AMB; puis abaissez du centre une perpendiculaire sur la corde de cet arc, et le problème sera résolu (102 et 125).

On pourra donc partager un angle en un nombre de parties égales qui soit une puissance parfaite de 2 (104).

PROBLÈME.

130. *Par un point donné* C, *mener une parallèle à une droite donnée* AB.

Nous nous sommes déja occupé de cette question (93 et 94), et nous en avons donné trois solutions, dont deux fondées sur les théorèmes des n.os 79 et 84, l'autre sur la propriété qu'ont deux droites d'être parallèles lorsque les angles correspondans

qui résultent de leur intersection par une troisième sont égaux. La propriété analogue dont jouissent les angles alternes-internes en fournit une autre solution très-simple. Si l'on mène en effet
Fig. 48. par le point C une sécante quelconque CD, il est clair qu'il suffira de faire au point C, et avec cette droite, un angle égal à CDA, ce qui ne saurait présenter de difficulté (128); mais, comme le rayon des arcs à décrire pour faire cet angle est arbitraire, nous le choisirons égal à CD : de cette manière nous pourrons nous dispenser de tracer cette droite CD. Ainsi du point C comme centre, et d'un rayon aussi grand qu'il sera possible, décrivez, à partir de AB, l'arc DF; puis du point D comme centre et avec la même ouverture de compas, décrivez l'arc CA; prenez ensuite l'arc DG = CA, et joignez CG : cette droite résoudra le problème.

Enfin on peut encore résoudre très-simplement le même problème en s'appuyant sur le théorème du n.º 117. Pour
Fig. 49. cela, d'un point quelconque D de AB, avec DC pour rayon, décrivez les deux arcs CA et BF, le premier terminé en C, et le second indéfini au dessus de AB; prenez l'arc BG = AC, et joignez CG : cette droite résoudra le problème (118).

THÉORÈME.

131. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux,*
Fig. 50. *deux angles au centre* AOB, DCF, *sont proportionnels aux arcs* AB, DF, *compris entre leurs côtés*, c'est-à-dire que l'on aura la proportion

$$AOB : DCF :: AB : DF.$$

En effet, portons l'arc DF sur l'arc AB autant de fois que la chose sera possible, nous trouverons qu'il y est contenu *deux* fois avec le reste IB : de sorte que

$$AB = 2DF + IB.$$

Mais si nous joignons les points de division G et I avec le centre, nous formerons les deux angles AOG et GOI, égaux à DCF (125); de sorte que

$$AOB = 2DCF + IOB;$$

Ainsi l'angle AOB contient l'angle DCF autant de fois que l'arc AB contient l'arc DF, et l'angle restant IOB s'appuie sur l'arc restant IB : par conséquent, si l'on porte à son tour

IB sur DF, et que l'on joigne les points de division avec le centre C, on verra de même que l'angle DCF contiendra IOB autant de fois que DF contient IB, et que l'angle restant KCF s'appuiera sur l'arc restant KF, et ainsi de suite, si l'on continue d'effectuer sur les arcs AB et DF et sur les angles AOB *et DCF* les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières quantités et celle des deux autres. Les deux séries de quotiens que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes : donc le rapport des deux angles AOB et DCF est le même que celui des deux arcs AB et DF (37); donc on a la proportion

$$AOB : DCF :: AB : DF$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

132. *Un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre.*

Mesurer un angle, c'est chercher le rapport de cet angle à un autre angle pris pour unité. Si donc A est l'angle à mesurer, et D l'unité angulaire, la mesure de l'angle A sera le rapport de A à D. Mais nous venons de voir que deux angles sont proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux : donc, si des points A et D comme centres, et avec la même ouverture de compas, nous décrivons les arcs B et C, le rapport $\frac{A}{D}$ sera le même que celui $\frac{B}{C}$, et par conséquent ce dernier sera la mesure de l'angle A. Or, *si l'on convient* de prendre l'arc C pour unité d'arc, le rapport $\frac{B}{C}$ sera la mesure de l'arc B : donc la mesure de l'arc B sera aussi celle de l'angle A ; donc *un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.* Fig. 51.

133. SCHOLIE. Remarquons toutefois qu'il ne faut pas prendre à la lettre cette manière de s'énoncer : car elle est tout-à-fait inexacte, attendu que l'on ne peut comparer entre elles que des quantités homogènes, tandis qu'un angle et un arc sont des quantités d'espèces essentiellement différentes (43 et 20); mais quand on dit qu'un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre, on doit

entendre que *le nombre abstrait qui exprime la mesure de l'angle, est celui même qui exprime la mesure de l'arc compris entre ses côtés, en prenant pour unité d'arc l'arc décrit avec le même rayon entre les côtés de l'unité angulaire.*

134. On prend ordinairement l'angle droit pour unité angulaire, et par conséquent le quadran pour unité d'arc : d'où l'on voit que *pour avoir alors la mesure d'un angle, il faudra chercher le rapport de l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre au quadran de la circonférence dont il fait partie*, ce qui ne saurait présenter de difficulté, puisqu'il suffira d'appliquer à ces deux arcs la méthode du n.° 30 et le calcul du n.° 31.

135. Pour faciliter, dans la pratique des arts, l'évaluation du rapport d'un arc donné au quadran de la circonférence à laquelle il appartient, on est convenu de partager la circonférence en 400 parties égales que l'on nomme *grades*, et que l'on désigne par la lettre ^{g}; de sorte que le quadran (^{q}) contient 100^g. On a ensuite subdivisé le grade en cent parties égales appelées *minutes* ($'$), et la minute en cent parties égales nommées *secondes* ($''$). Il suit de là que le grade est la *centième* partie du quadran; que la minute est la *centième* partie du grade, et par conséquent la *dix millième* partie du quadran; enfin que la seconde est la centième partie de la minute, et partant la *millionième* partie du quadran; de sorte qu'un nombre quelconque de grades, de minutes et de secondes peut toujours s'exprimer en fraction décimale du quadran. Par exemple, un arc de $145^g\,82'\,36''$ équivaut à $1^q,458236$: car $100^g=1^q$; 45^g sont les 45 centièmes du quadran; $82'=0^q,0082$, et $36''=0^q,000036$. Donc un angle qui comprend entre ses côtés un arc de $145^g\,82'\,36''$ vaut $1^D,458236$, c'est-à-dire un angle droit, plus les quatre cent cinquante-huit mille deux cent trente-six millionièmes d'un droit. Donc, *pour obtenir la mesure d'un angle, il suffira d'évaluer l'arc compris entre ses côtés en fraction décimale du quadran, et cette fraction, considérée comme exprimant des parties de l'angle droit, sera la mesure demandée.*

136. Avant l'établissement du *système métrique décimal*, on partageait la circonférence en 360 parties égales nommées

degrés (°), de sorte que le quadran contenait 90°; le degré se subdivisait en 60 minutes, et la minute en 60 secondes. Pour avoir, dans ce système, la mesure d'un angle, il faut donc prendre le rapport du nombre de degrés et de parties de degré contenus dans l'arc correspondant, à 90°. Pour cela on convertit cet arc, ainsi que 90°, en unités de la plus basse espèce de celles qu'il contient, et l'on prend le rapport des deux *nombres abstraits* ainsi trouvés. Par exemple, si l'angle à mesurer intercepte entre ses côtés un arc de 36° 54′ 45″, on réduira cet arc en secondes, ce qui donnera 132885″; on verra de même que 90° = 324000″, de sorte que l'angle donné est les $\frac{132885}{324000} = \frac{2953}{7200}$ de l'angle droit.

Cette division de la circonférence en 360 parties égales présente des avantages qui la font encore préférer à la nouvelle, dans bien des circonstances. Le principal tient à la propriété qu'a le nombre 360 d'avoir beaucoup de diviseurs : ainsi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, etc., de la circonférence, valent respectivement 180°, 120°, 90°, 72°, 60°, 40°, 36°, 30°, 24°, etc.

137. Il est facile de convertir un nombre quelconque de grades et parties de grade en degrés, minutes et secondes, et réciproquement. En effet, puisque le quadran se divise en 100^G ou en 90°, on voit qu'un grade est les $\frac{9}{10}$ d'un degré, et qu'un degré est les $\frac{10}{9}$ d'un grade.

D'après cela, si l'on veut convertir $101^G,6695$ en degrés, minutes et secondes, il n'y aura qu'à prendre les $\frac{9}{10}$ de ce nombre, ce qui se fera en en retranchant sa dixième partie, puis à convertir successivement les fractions décimales de degré et de minute respectivement en minutes et en secondes, en les multipliant par 60. On fera donc le calcul suivant :

$$\begin{array}{r} 101^G,6695 \\ 10,16695 \\ \hline 91^\circ,50255 \\ 30',15300 \\ 9'',18000 \end{array}$$

de sorte que $101^G,6695$ valent 91° 30′ 9″,18.

Si maintenant on veut évaluer 91° 30′ 9″,18 en grades, on commencera par réduire les secondes en fraction décimale d'une minute en les divisant par 60, puis les minutes en frac-

tion décimale du degré en les divisant aussi par 60, et l'on trouvera ainsi que 91° 30′ 9″,18 valent successivement 91° 30′,153 et 91°,50255. Maintenant, pour convertir ce dernier nombre en grades, il faudra en prendre les $\frac{10}{9}$, ou, ce qui revient au même, l'augmenter de sa neuvième partie. On fera donc le calcul suivant :

$$\begin{array}{r} 91^{\circ},50255 \\ 10,16695 \\ \hline 101^{c},66950 \end{array}$$ nombre primitif.

138. Mais comment évaluer le nombre des parties du quadran contenues dans un arc donné ? On y parvient au moyen du *rapporteur*. C'est un demi-cercle en cuivre ou en corne, dont la circonférence est divisée en grades ou en degrés. Si
Fig. 52. l'instrument est en cuivre, la partie A′B′C′ est évidée, et le centre est indiqué par un très-petit cran O. Deux autres entailles A′ et C′ laissent voir les deux points A′ et C′ du diamètre AOC. Le rapporteur en corne n'a pas besoin de ces entailles à cause de sa transparence ; seulement il est percé à son centre d'un très-petit trou.

Fig. 53. Si maintenant on veut savoir combien un arc MN vaut de *degrés*, par exemple, on mènera de son centre O à ses extrémités deux droites indéfinies, puis on placera le diamètre AC d'un rapporteur divisé en 180° sur le côté OM, de manière que son centre coïncide exactement avec celui de l'arc MN, et l'on verra par quelle division passe l'autre côté ON ; le numéro de cette division indiquera le nombre de degrés de l'arc MN : car tous les arcs compris entre les côtés de l'angle NOM doivent être du même nombre de degrés, puisque le rapport de chacun d'eux au quadran de la circonférence à laquelle il appartient, étant la mesure de cet angle (134), doit être une quantité constante.

Si le côté ON passait entre deux traits consécutifs de la division du limbe, on verrait duquel il se rapproche le plus ; ce serait alors le numéro de ce trait que l'on prendrait pour l'indication du nombre de degrés de l'arc, et *l'on aurait ainsi la valeur de cet arc à moins d'un demi-degré.*

De même qu'on peut, au moyen du rapporteur, évaluer le nombre de degrés de l'arc compris entre les côtés d'un angle, de même on peut se proposer de mener par un point donné N une

droite qui fasse avec une droite indéfinie M'M un angle d'un certain nombre de degrés, de 65°, par exemple. Pour cela on trace à l'encre de Chine sur le rapporteur de corne la direction du rayon *qui va au* 65.e trait de division, puis on fait glisser le *diamètre* AC du rapporteur le long de MM', jusqu'à ce que ce *rayon* vienne passer par le point N; et, introduisant une *pointe* très-fine par le petit trou qui indique le centre du rapporteur, on marque ainsi le sommet O de l'angle demandé. Il ne reste plus alors qu'à joindre les points O et N par une ligne droite.

Si le rayon que l'on a marqué à l'encre n'était pas assez long pour aller passer par le point N, on ferait en un point quelconque de MM' un angle de 65°, et l'on mènerait ensuite par le point N une parallèle au second côté de cet angle (86, 3.°).

139. Nous avons dit tout-à-l'heure que le rapporteur donne la mesure d'un angle seulement à un demi-degré près, et cependant il peut bien se faire que cette approximation ne soit pas suffisante. Comment donc obtenir la valeur d'un angle avec plus de précision?

Il est évident qu'il existe une relation déterminée entre un arc quelconque et sa corde, de sorte que la connaissance de l'une de ces quantités entraîne nécessairement celle de l'autre. On conçoit donc que l'on a pu construire une table qui, pour une valeur donnée du rayon, fît connaître les cordes de tous les arcs croissans de minute en minute ou de seconde en seconde depuis zéro jusqu'à 90°. Cette table a été effectivement calculée, mais par des procédés qui ne sont pas de nature à trouver place ici.

On trouvera à la fin de cet ouvrage une table qui, pour un rayon égal à 100, donne les cordes de tous les arcs en progression arithmétique dont la raison est 10', ce qui est bien suffisant pour la pratique.

Pour mesurer un angle, on décrira entre ses côtés un arc dont le rayon soit égal à cent unités; et l'on fera bien de prendre le millimètre pour unité: car on trouve dans le commerce, sous le nom de *règles de Kutsch*, des doubles décimètres très-bien divisés en millimètres; on mesurera la corde de cet arc, et, en la cherchant dans la table, on lira à côté la valeur de l'angle demandé. Si, par exemple, cette corde valait $44^{m.m},43$, on trou-

verait que ce nombre est à la fois dans la ligne horizontale commençant par 25°, et dans la ligne verticale qui porte en tête 40′, c'est-à-dire que l'angle vaut 25° 40′.

Mais si la corde vaut 44m.m,59, par exemple, on verra que l'angle est compris entre 25° 40′ et 25° 50′. Pour l'avoir plus approximativement, on opèrera comme on l'a fait au n.º 256 de l'Arithmétique, en considérant les cordes comme les logarithmes des nombres exprimés par les nombres de degrés et de minutes que contiennent les arcs correspondans : ainsi on prendra la différence 0,28 des cordes de ces deux arcs, et la différence 0,16 entre la plus petite de ces cordes et la nôtre; et en admettant ce principe, qui est sensiblement vrai, savoir, que *les différences des cordes sont proportionnelles aux différences des arcs correspondans*, on posera la proportion :

28 centièmes (différence des cordes des arcs 25° 40′ et 25° 50′) : 16 centièmes (différence de la corde de l'arc 25° 40′ à celle de l'arc inconnu) :: 10′ (différence des arcs 25° 40′ et 25° 50′) : x (différence de l'arc inconnu à l'arc 25° 40′).

D'où l'on tirera $x = \frac{160'}{28} = 6'$: ainsi l'angle demandé vaut 25° 40′ + 6′ = 25° 46′.

Si l'angle donné est obtus, on cherchera la mesure de son supplément, et il n'y aura qu'à retrancher cette mesure de 180°.

Fig. 47. Si l'on veut faire en un point A d'une droite donnée AB un angle dont le nombre des degrés est connu, par exemple, de 25° 46′, on décrira du point A comme centre, avec le décimètre pour rayon, un arc indéfini PQ; puis on calculera la corde de 25° 46′, on la portera sur cet arc de P en D, et en joignant AD, on aura l'angle demandé. Comme l'arc 25° 46′ ne se trouve pas dans la table, on y cherchera l'arc 25° 40′, et l'on trouvera que sa corde est 44,43; puis, prenant la différence des cordes des arcs 25° 40′ et 25° 50′, on posera, comme dans le n.º 249 de l'Arithmétique, la proportion 10 : 6 :: 28 : x = 17 centièmes : d'où l'on conclura que la corde de 25° 46′ est 44,43 + 0,17 = 44,6.

Si l'arc donné était plus grand que 90°, on construirait sur le prolongement de AB un angle dont la mesure fût le supplément de cet arc.

140. Lorsque l'on veut mesurer un angle sur le terrain, on emploie ordinairement le *graphomètre*. La pièce principale de cet instrument est un demi-cercle de cuivre, de même forme

Fig. 54.

qu'un rapporteur, mais d'environ deux à trois décimètres de diamètre, et divisé comme lui en 180° ou en 200 grades. Aux deux extrémités du diamètre qui limite le demi-cercle s'élèvent deux petites plaques rectangulaires nommées *pinnules*. Une de ces plaques est fendue par le haut et ouverte par le bas, tandis que celle qui lui est opposée présente la disposition contraire. Au milieu de chacune des grandes ouvertures est tendu un crin très-fin, de telle sorte que sa direction et celle de l'axe de la fente opposée correspondent très-perpendiculairement sur le diamètre.

Autour du centre tourne une règle armée aussi de deux pinnules semblables aux premières, dont les crins correspondent très-perpendiculairement au diamètre tracé sur cette règle, que l'on nomme *alidade*.

Pour fractionner les parties du limbe, on a gravé à chaque extrémité de l'alidade et sur sa largeur un vernier circulaire, concentrique au demi-cercle, et dont le zéro est à l'extrémité du diamètre tracé sur l'alidade. Si l'on suppose que le vernier embrasse quatorze divisions du limbe, et qu'il soit divisé en quinze parties égales, on verra, en raisonnant comme au n.° 40, que les coïncidences de ses traits avec ceux du limbe marquent des quinzièmes de degré : de sorte que si son zéro tombe entre la 48.e et la 49.e division du cercle, et que la coïncidence ait lieu sur le septième trait, l'angle compris entre l'alidade *mobile* et l'alidade fixe sera de 48°, plus des $\frac{7}{15}$ d'un degré, c'est-à-dire de 48° 28' : car le quinzième d'un degré est 4 minutes. Ainsi donc il faudra ajouter au numéro du limbe qui est immédiatement en arrière du zéro du vernier le produit de 4' par le numéro de la coïncidence.

Pour éviter la peine de faire cette multiplication, on regarde chaque trait du vernier comme indiquant un intervalle de *quatre* minutes : ainsi la coïncidence se faisant sur le septième trait du vernier, c'est-à-dire sur le deuxième après celui numéroté 20, on en conclut que le nombre des minutes est 28.

Si aucun des traits du vernier ne coïncide avec un de ceux du limbe, on prendra pour le numéro de la coïncidence celui du trait du vernier qui en approche le plus, et l'erreur ne sera pas de 2'.

Le centre du cercle est fixé sur une petite boule de cuivre mobile dans un genou formé par deux cavités hémisphériques de

même diamètre que cette boule, et que l'on peut serrer contre elle au moyen d'une vis. Enfin le genou se fixe lui-même, à l'aide d'une douille, sur un pied à trois branches mobiles à volonté, afin que l'on puisse placer le graphomètre dans une position et à une hauteur convenables.

Lorsque l'on veut relever l'angle formé par les droites qui uniraient un point donné à deux autres, on établit le centre du graphomètre en ce point, et l'on dirige l'alidade fixe sur un des deux autres points, de telle manière qu'*en visant par la fente de l'une de ses pinnules*, le crin de l'autre coupe ce second point. On pointe de la même manière l'alidade mobile sur le troisième point, et on lit l'angle marqué par le zéro du vernier.

Si l'on ne pouvait placer le centre du graphomètre au sommet de l'angle à mesurer, ce qui arriverait s'il s'agissait, par exemple, de l'angle formé par les directions de deux murailles, on le mettrait à une petite distance de ce sommet; puis ayant fait planter des jalons en deux points situés à la même distance des côtés de l'angle qu'en est le centre de l'instrument, on dirigerait les deux alidades sur ces jalons, et l'angle compris entre elles serait égal à l'angle donné (88).

Lorsque l'on veut mesurer des angles avec un plus grand degré de précision, on emploie un cercle entier au lieu du graphomètre, et les deux pinnules sont remplacées par des lunettes, l'une portée par l'alidade mobile, et l'autre placée au dessous du diamètre fixe. Au *foyer* de l'*objectif* de chacune d'elles se croisent deux fils d'araignée ou de platine très-fins, pour fixer la direction de leur *axe optique* (*a*). De plus ces lunettes sont *plongeantes*,

---

(*a*) Ces lunettes sont composées de *deux verres convexes* placés aux extrémités d'un tube cylindrique. Le verre qui est du côté de l'objet que l'on regarde se nomme l'*objectif*; et l'autre, qui se trouve du côté de l'œil, s'appelle l'*oculaire*.

Les rayons lumineux qui émanent d'un objet placé en avant de l'objectif vont, après l'avoir traversé, se réunir dans un très-petit espace où ils forment une image extrêmement nette de l'objet. Le centre de cette miniature se nomme le *foyer* de l'objectif; ce foyer se trouve sur la droite qui joint les milieux des deux verres. C'est cette droite que l'on appelle l'*axe optique* de la lunette. Comme l'ouverture de l'oculaire est très-petite, le centre de la pupille correspond nécessairement à celui de ce verre, de sorte que la direction de l'axe optique est déterminée par le centre de la pupille et le foyer de l'objectif.

c'est-à-dire que leur axe optique peut se mouvoir dans un *plan vertical* (c'est un plan mené par une verticale) passant par le centre du cercle. Le limbe est divisé en parties plus petites que des degrés; par exemple, en demi-degrés, et au moyen d'un vernier, on fractionne ces parties. Si le vernier était divisé en trente parties qui en valussent vingt-neuf du limbe, les numéros des coïncidences marqueraient des trentièmes de 30', c'est-à-dire des intervalles d'une minute.

Pour vérifier si le graphomètre est bien construit, on le placera dans un lieu dont l'horizon soit libre; puis, dirigeant des rayons visuels sur les objets environnans, on mesurera successivement les angles formés par chaque rayon visuel avec le suivant, ce qu'on appelle *faire un tour d'horizon*. Si la différence entre la somme des angles observés et 360° est supérieure à la moitié du nombre des minutes marqué par celui de ces angles, on sera sûr que l'instrument est mal construit, et qu'au contraire il sera d'autant plus exact que cette différence sera plus petite. En effet l'erreur commise dans la mesure d'un angle doit être moindre qu'une demi-minute (page 55).

Observons toutefois qu'il sera bon de recommencer plusieurs fois cette opération pour prévenir les erreurs que l'on pourrait commettre dans l'observation des angles.

141. De même que l'on peut mesurer un angle donné avec un graphomètre, de même on peut, au moyen de cet instrument, faire sur le terrain un angle dont le nombre des degrés est connu. Ainsi on pourra l'employer pour mener une perpendiculaire à une droite donnée. Mais quand cette perpendiculaire ne doit pas être très-longue, on préfère au graphomètre *l'équerre d'arpenteur*, qui est bien plus portative.

Cette équerre, telle qu'on l'a perfectionnée dernièrement sous le nom de *goniasmomètre*, est formée de deux cylindres en cuivre ABCD et CDIK, de même diamètre, et mobiles autour de leur axe commun. Le premier a environ 4c.m de hauteur, et est percé de deux pinnules A et B, disposées de telle manière que le crin de celle-ci et l'axe de celle-là correspondent bien perpendiculairement à l'un de ses diamètres. Le second cylindre, qui a 5c.m de hauteur, est percé de quatre pinnules C et D, F et G, disposées comme les précédentes par rapport à deux diamètres qui se coupent à angles droits. Cet instrument est porté sur un bâton Fig. 85.

qui s'enfonce dans une *douille* fixée à la base du cylindre ABCD. Cette douille se dévisse et se place dans l'intérieur de l'équerre, que l'on peut alors enfermer dans un étui.

Si l'on veut, au moyen de cet instrument, abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée PQ, d'un point R pris hors de cette droite, on fera planter un jalon en R et un autre quelque part en P, sur la droite PQ. Puis on fixera le bâton de l'équerre au point de cette droite où l'on juge que viendra tomber le pied de la perpendiculaire; et, ayant dirigé deux des pinnules du cylindre supérieur sur le jalon P, on verra si le jalon R se trouve dans la direction des deux autres. S'il est à gauche, par exemple, de cette direction, on reculera l'instrument vers le point P pour donner un nouveau *coup d'équerre*, comme disent les arpenteurs; et, après un petit nombre d'essais, le bâton de l'équerre se trouvera planté au pied de la perpendiculaire demandée.

Fig. 56.

Si l'on veut prolonger cette perpendiculaire au delà de PQ, on fera faire au cylindre supérieur un quart de révolution, et il n'y aura ensuite qu'à faire planter des jalons dans la direction des pinnules qui étaient pointées tout-à-l'heure sur le jalon P.

Remarquons que les jalons et le bâton de l'équerre doivent être bien verticaux.

Si la perpendiculaire doit être élevée en un point donné de PQ, on y plantera le bâton de l'équerre; puis, ayant pointé deux des pinnules du cylindre supérieur sur le jalon P, les deux autres détermineront la direction de la perpendiculaire demandée.

Fig. 55. Le bord supérieur du cylindre ABCD est divisé en 360°, dont l'origine répond au point A, et sur le bord inférieur du cylindre CDIK est gravé un vernier semblable à celui de la figure 54, et dont le zéro est directement au dessous du point C. Alors si, ayant placé ce zéro sur celui de la circonférence graduée, auquel cas les deux fentes C et A sont sur une même verticale ainsi que les crins des pinnules opposées, on dirige les deux pinnules A et B sur un certain point, et qu'on amène ensuite les pinnules C et D sur un autre point situé à gauche du premier, le vernier indiquera à moins de 2' près l'angle formé par les rayons visuels menés du centre de l'équerre aux points dont il s'agit. Cet instrument peut, comme on voit, remplacer le graphomètre; mais, à cause de sa petitesse et de la difficulté de maintenir son pied dans une position bien verticale pendant toute la durée d'une opération, il est beaucoup moins exact.

Pour vérifier si les diamètres CD et FG se coupent bien à angles droits, on mettra le zéro du vernier sur 180°, et l'on fera planter deux jalons, l'un dans la direction AB, et l'autre dans la direction FG. Puis, en faisant tourner le cylindre supérieur, on pointera le diamètre FG sur le premier jalon, et alors, en regardant à travers les pinnules C et D, on devra apercevoir le second : car on n'a fait que renverser l'angle DOG sur COG (76).

On se procure à peu de frais, de la manière suivante, une équerre d'arpenteur qui pourra servir quand il ne s'agira pas d'opérer bien en grand. Pour cela, tracez avec soin sur une planche bien dressée, et un peu épaisse afin de la préserver des influences de l'atmosphère, deux droites perpendiculaires entre elles, et plantez à leurs extrémités quatre aiguilles très-fines, et qui ne penchent d'aucun côté de la planche. Vous n'aurez plus qu'à la fixer sur un bâton au moyen d'un clou enfoncé au point de section des deux perpendiculaires.

THÉORÈME.

142. *Tout angle* INSCRIT (*on appelle ainsi celui qui est formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence*) *a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Nous distinguerons trois cas, selon que le centre sera sur un des côtés de l'angle, et qu'il sera intérieur ou extérieur à l'angle.

1.° Soit l'angle BAC, dont le côté AC passe par le centre O. Fig. 58.
Si nous menons le diamètre IK parallèle à AB, nous formerons l'angle IOC égal à BAC son correspondant, par rapport aux parallèles AB et IC et à la sécante AC ; or l'angle au centre IOC a pour mesure l'arc IC compris entre ses côtés : donc l'angle BAC a aussi pour mesure cet arc IC. Mais l'arc IC est égal à AK : car ils correspondent aux angles égaux IOC et AOK (60 et 126) ; d'un autre côté l'arc AK est égal à BI, puisqu'ils sont compris entre les cordes parallèles AB et IK (117) : donc les deux arcs IC et BI, égaux à un troisième AK, sont égaux ; donc IC est la moitié de l'arc BC ; donc enfin l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés.

2.° Considérons l'angle BAD qui comprend le centre entre ses côtés. Si nous menons le diamètre AC, nous le décomposerons dans les deux angles BAC et CAD, de sorte qu'il aura pour mesure la somme des mesures de ces angles. Mais, d'après ce que nous venons de voir, les angles BAC et CAD ont respecti-

vement pour mesures la moitié de BC et la moitié de CD: donc l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ CD, c'est-à-dire la moitié de BCD.

3.° Soit enfin l'angle FAB auquel le centre est extérieur. Je tire encore le diamètre AC, et je forme ainsi les deux angles FAC et BAC, dont la différence est précisément l'angle proposé FAB : donc sa mesure sera la différence de leurs mesures. Or les angles FAC et BAC, dont un des côtés passe par le centre, ont respectivement pour mesures la moitié de FC et la moitié de BC : donc l'angle FAB a pour mesure $\frac{FC}{2} - \frac{BC}{2}$, c'est-à-dire la moitié de FB.

Fig. 59. 143. Corollaire I. *Tous les angles* ABC, ADC, AFC, *inscrits dans un même arc* ABC, c'est-à-dire qui ont leurs sommets placés sur cet arc, et dont les côtés passent par ses extrémités A et C, *sont égaux*, puisqu'ils ont pour mesure la moitié du même arc AMC, compris entre leurs côtés.

Fig. 60. 144. Corollaire II. *Tout angle* DAF *inscrit dans une demi-circonférence est un angle droit :* car il a pour mesure la moitié de l'arc DMF compris entre ses côtés, c'est-à-dire un quadran (127).

145. Ce dernier corollaire fournit le moyen *d'élever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une droite* AB, *sans la prolonger*. Pour cela on décrira une circonférence d'un point quelconque O comme centre, avec OA pour rayon; par le point D, où cette circonférence coupe AB, on mènera le diamètre DF, et joignant AF, le problème sera résolu.

THÉORÈME.

146. *L'angle formé par une corde et la tangente à l'une de ses extrémités a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Fig. 58. Si l'on conçoit en effet que la corde AD, supposée prolongée indéfiniment, tourne autour du point A, de manière qu'elle tende à sortir de la circonférence, le point D se rapprochera sans cesse de A, et l'angle DAB ne cessera pas d'avoir pour mesure la moitié de l'arc BCD compris entre ses côtés : donc à la limite, c'est-à-dire quand le point D sera venu se réunir au point A, ou, en d'autres termes, quand la sécante AD sera devenue la tangente

AT, l'angle correspondant BAT aura encore pour mesure la moitié de l'arc BMA compris entre ses côtés (*a*).

THÉORÈME.

147. *L'angle* D'AB, *formé par une corde* AB *et par le prolongement d'une autre* AF, *a pour mesure la demi-somme des arcs* FNA *et* ACB, *sous-tendus par ces cordes.*

En effet la somme des angles adjacens BAD' et FAB vaut deux droits : donc la somme de leurs mesures est une demi-circonférence ; or l'angle inscrit FAB a pour mesure la moitié de l'arc FB compris entre ses côtés ; donc, en retranchant cette moitié d'une demi-circonférence, on aura la mesure de l'angle BAD'. Mais retrancher $\frac{1}{2}$ FB d'une demi-circonférence, revient évidemment à retrancher FB de la circonférence entière, et à prendre la moitié du reste FACB ; donc enfin l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ FACB, c'est-à-dire la demi-somme des deux arcs FNA et ACB (*b*).

(*a*) On peut démontrer ce théorème directement de la manière suivante : Par le point de contact A menons le diamètre AC, nous décomposerons ainsi l'angle BAT dans les deux angles BAC et CAT : donc il aura pour mesure la somme de leurs mesures. Or l'angle CAT, qui est droit (108), a pour mesure un quadran (132), c'est-à-dire la moitié de la demi-circonférence ADC ; l'angle inscrit BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés : donc l'angle BAT a pour mesure $\frac{CDA}{2} + \frac{BC}{2}$, c'est-à-dire la moitié de l'arc BCA intercepté par ses côtés.

(*b*) Ce théorème est, ainsi que le précédent, un cas particulier de celui du n.° 142. Pour le faire voir, nous rappellerons une convention que l'on fait dans l'application de l'algèbre à la géométrie, savoir, que quand deux distances sont comptées dans des sens directement contraires, on indique cette opposition de direction en les affectant l'une du signe *plus* et l'autre du signe *moins*.

Cela posé, la proposition du n.° 142 revient à dire qu'*un angle inscrit a pour mesure la demi-différence des arcs sous-tendus par ses côtés, en comptant ces deux arcs dans le même sens.* Ainsi l'angle BAD a pour mesure $\frac{ACB-AD}{2}$, et cette mesure restera la même lorsque le côté AD tournera autour du sommet A : donc, quand AD sera devenue la tangente AT, l'angle BAT aura pour mesure $\frac{ACB}{2}$: car alors l'arc AD sera nul. Si AD continue de tourner, son prolongement rentrera dans la circonférence, et l'arc sous-tendu ANF, étant compté en sens contraire de ACB, sera *négatif ;* mais pour avoir la mesure de D'AB, il faut retrancher la moitié de cet arc ANF de celle de

THÉORÈME.

Fig. 61. 148. *L'angle* ABC, *dont le sommet est placé entre le centre et la circonférence, a pour mesure la demi-somme des arcs* AC *et* DF *compris entre ses côtés et leurs prolongemens.*

Si nous menons par le point F la parallèle FI au côté AB, nous formerons l'angle inscrit IFC, égal à l'angle ABC: donc cet angle IFC, et par conséquent l'angle ABC, aura pour mesure la moitié de IAC, c'est-à-dire la moitié de AI plus la moitié de AC. Mais l'arc AI=DF (117): donc enfin l'angle ABC a pour mesure la moitié de AC plus la moitié de DF, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

Fig. 62. 149. *L'angle* ABC, *dont le sommet est situé hors de la circonférence, a pour mesure la demi-différence des arcs concave et convexe* AC *et* DF *compris entre ses côtés.*

Menons par le point F la parallèle FI au côté AB, et nous formerons l'angle inscrit CFI, égal à ABC: donc cet angle ABC aura pour mesure la moitié de l'arc IC compris entre les côtés de CFI, ou, ce qui revient au même, la demi-différence des arcs AC et AI. Mais AI=DF: donc l'angle ABC a pour mesure la demi-différence des arcs AC et DF, ce qu'il fallait démontrer.

150. Nous avons vu qu'un angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. On peut se demander si la réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire *si de ce qu'un angle*
Fig. 63. *a pour mesure l'arc concave* AMC *compris entre ses côtés, on doit conclure que cet angle ait son sommet au centre.*

Le principe que nous avons posé au n.° 122 va nous conduire à la solution de cette question. En effet, si l'angle dont il s'agit n'a pas son sommet au centre, il l'aura nécessairement ou hors de la circonférence, ou sur la circonférence, ou entre cette courbe et le centre. Dans le premier cas sa mesure sera moindre que la moitié de AMC (149), et dans le second elle sera préci-

---

ACB: donc cet angle aura pour mesure $\frac{ACB}{2}+\frac{ANF}{2}=\frac{FACB}{2}$: car pour soustraire une quantité d'une autre, il faut l'écrire à la suite de cette autre avec un signe contraire au sien.

sément la moitie de AMC (142) : donc les deux premières hypothèses ne peuvent avoir lieu. Actuellement si le sommet de l'angle est placé entre le centre et la circonférence, cet angle aura pour *mesure la* moitié de l'arc AMC compris entre ses côtés, plus la *moitié* de l'arc compris entre leurs prolongemens (148) : donc pour qu'il ait pour mesure l'arc AMC, il suffira que l'arc compris entre les prolongemens de ces côtés soit égal à AMC; donc si l'on prend un arc *quelconque* DNF égal à AMC, et que l'on tire les cordes *transversales* AF et DC, on formera un angle ABC qui aura pour mesure l'arc AMC compris entre ses côtés, et dont le sommet ne sera pas au centre; et l'on voit qu'il y a une infinité d'angles qui jouissent de cette propriété. Donc *la réciproque du théorème* 132 *est fausse.*

PROBLÈME.

151. *Quel est le lieu géométrique des sommets de tous les angles qui, s'appuyant sur l'arc* AMC, *ont cet arc pour mesure.*

D'abord il est évident que si, par les trois points A, O, C, on fait passer une circonférence, tous les angles inscrits dans l'arc AOC seront égaux à l'angle AOC (143), et auront ainsi l'arc AMC pour mesure (132). D'un autre côté il n'y a que ces angles qui aient cette mesure : car tous ceux dont les sommets ne seraient pas situés sur l'arc AOC auraient une mesure plus grande (148) ou plus petite (149) que la moitié de l'arc AKC : donc ils seraient plus grands ou plus petits que l'angle AOC, lequel a pour mesure $\frac{1}{2}$ AKC. Donc l'arc AOC est le lieu demandé.

De ce que l'angle AOC a à la fois pour mesure l'arc AMC et $\frac{1}{2}$AKC, il ne faudrait pas conclure que AMC fût la moitié de AKC : car cela signifie seulement que les rapports des arcs AMC et $\frac{1}{2}$AKC aux quadrans des cercles dont ils font partie, sont égaux (134); donc, à moins que les conséquens de ces rapports ne soient égaux, les antécédens AMC et $\frac{AKC}{2}$ ne pourront pas l'être.

THÉORÈME.

152. *Tout angle qui a pour mesure la moitié de l'arc concave* AMC, *compris entre ses côtés, a son sommet placé* Fig. 59.
sur la partie restante de la circonférence.

Cette proposition est la réciproque de celle du n.o 142, et se démontrera d'après la règle du n.o 122.

153. Corollaire. Il suit de là que si l'on fait mouvoir un angle ABC sur un plan, de manière que ses deux côtés passent constamment par deux points fixes A et C de ce plan, son sommet B décrira un arc de cercle tel que tous les angles que l'on pourra y inscrire seront égaux à l'angle B.

154. Remarquons que si l'angle B était droit, l'arc dont il s'agit serait une demi-circonférence (127). Donc *le lieu des sommets de tous les angles droits dont les côtés passent par deux points donnés, est une circonférence dont le diamètre est la droite qui les unit.*

PROBLÈME.

155. *Décrire une circonférence qui passe par trois points*
Fig. 64. *donnés* A, B, C, *lorsqu'on ne peut approcher du centre.*

Pour cela, disposez deux règles MN et NO de manière que la première passe par les deux points A et B, et la seconde par les deux points C et B, et ajustez-les ensuite de manière que leur angle reste invariable. Si, après avoir fixé deux pointes en A et en C, vous faites mouvoir l'instrument de manière que les deux règles s'appuient constamment sur les pointes A et C, la pointe à tracer que vous aurez placée en B, où leurs arètes intérieures se rencontrent, décrira l'arc qui doit s'étendre au dessus de AC; et quand la règle NM sera venue se coucher sur AC, l'autre règle NO sera tangente à la circonférence demandée au point C, puisqu'elle coupera alors cette circonférence en deux points qui seront réunis en C (107). Pour achever de décrire la circonférence, on recommencera l'opération en prenant les points A et B pour centres de rotation; mais on se contentera de faire mouvoir l'instrument jusqu'à ce que la règle posée sur AC soit venue se coucher sur AB.

Ce problème trouve son application lorsque l'on veut enceindre d'un mur circulaire un espace dans lequel on ne peut pénétrer.

PROBLÈME.

Fig. 65. 156. *Décrire sur une droite donnée* AB *un arc* CAPABLE *de l'angle donné* K, *c'est-à-dire tel que tous les angles inscrits dans cet arc soit égaux à* K.

Supposons le problème résolu, et soit ACB l'arc demandé : tous les angles inscrits dans cet arc auront pour mesure la moitié de la partie restante AMB de la circonférence, et par conséquent cette moitié devra être la mesure de l'angle donné K. Donc si l'on fait au point B et *au dessous* de AB l'angle ABD égal à K, cet angle aura pour mesure la moitié de AMB, et par conséquent BD sera tangente à la circonférence (142 et 146) : donc cette circonférence doit passer par le point A, et toucher la droite BD au point B, ce qui nous ramène au problème du n.° 116.

Ainsi, pour résoudre le problème, on fera au point B et au dessous de AB un angle ABD égal à K ; on élèvera au point B une perpendiculaire sur BD ; on en mènera une seconde sur le milieu de AB ; et du point O, où ces deux perpendiculaires se couperont, avec OB pour rayon, on décrira une circonférence. L'arc situé au dessus de AB résoudra le problème.

Quant à l'arc inférieur AMB, il est capable du supplément de l'angle donné : car la somme des deux angles AMB et ACB a pour mesure la moitié de la circonférence.

Donc si l'angle donné K est droit, l'arc demandé doit être une demi-circonférence ; et en effet la perpendiculaire élevée sur BD au point B coïncide alors avec AB. Cela résulte encore de la remarque que nous avons faite au n.° 154.

157. Ce problème trouve son application dans la topographie, qui est l'art de lever le plan d'un pays de peu d'étendue. Supposons, en effet, que l'on veuille *fixer sur une carte la position d'un point* D, *duquel on puisse voir à la fois trois points* Fig. 66.
A, B, C, *déja représentés en a, b, c sur cette carte.* On se transportera au point D avec un graphomètre, et l'on y mesurera les angles ADB et BDC formés par les rayons visuels qui vont de D aux trois points A, B, C. Il est clair que le point inconnu *d* devra se trouver sur un arc capable de l'angle ADB, et terminé aux points *a* et *b* : car, la carte devant être la représentation parfaite du terrain, les droites qui joignent les points *a*, *b*, *c*, *d*, doivent former les mêmes angles que celles qui unissent les objets A, B, C, D. Par la même raison il devra se trouver sur l'arc capable de BDC, décrit sur *bc* : donc il sera à leur point d'intersection *d*. On vérifiera cette construction en observant que, si l'on tire les diamètres *bf* et *bg*, les trois points *f*, *d*, *g*, devront être en ligne droite.

Remarquons que si les quatre points A, B, C, D, étaient situés sur une même circonférence, l'arc qui passe par les trois points a, b, d, passerait aussi par le point c, et coïnciderait ainsi avec l'arc décrit par les trois points b, c, d (99), de sorte que la position du point d resterait indéterminée. On aurait alors recours à un quatrième point E, que l'on combinerait avec deux des trois points A, B, C.

PROBLÈME.

Fig. 67. 158. *D'un point* A *donné hors d'une circonférence mener une tangente à cette circonférence.*

Supposons le problème résolu, et soit AT la tangente demandée. Si nous joignons OT, l'angle OTA ainsi formé sera droit : donc son sommet se trouvera sur la circonférence décrite sur OA comme diamètre (154). Mais ce sommet doit aussi se trouver sur la circonférence donnée : donc il sera à l'intersection de ces deux circonférences. Ainsi, pour résoudre le problème, on tirera OA; sur cette droite, comme diamètre, on décrira une circonférence, et, en joignant le point donné A avec les points d'intersection T et T', on aura les deux tangentes AT et AT', qui résolvent également le problème. Si l'on joint en effet OT et OT', on formera des angles droits OTA et OT'A (144) : donc ces droites sont chacune perpendiculaires à l'extrémité d'un rayon, et partant tangentes à la circonférence.

159. Corollaire. Si l'on fait tourner la partie inférieure de la figure autour de OA comme charnière, les deux demi-circonférences AT'O et CT'B viendront recouvrir exactement leurs correspondantes supérieures : donc le point T' viendra tomber à la fois sur ATO et sur BTC, et par conséquent à leur point de section T; donc *les deux tangentes* AT et AT' *sont égales*, et l'angle TAO = T'AO; de sorte que *la droite qui joint le point de concours de deux tangentes au centre divise l'angle formé par ces tangentes en deux parties égales.*

160. Réciproquement, si l'on divise l'angle TAT' de deux tangentes en deux parties égales, la droite de division passera par le centre de la circonférence, sans quoi, en joignant ce centre avec le point A, l'angle TAT' serait divisé en deux parties égales par deux droites distinctes, ce qui est absurde.

Donc *le lieu des centres de toutes les circonférences tan-*

gentes à deux droites données est la droite qui divise leur angle en deux parties égales.

161. On peut encore résoudre le problème précédent de la manière suivante.

Décrivez des points O et A comme centres, et avec les rayons respectifs 2OB et OA, deux circonférences qui se couperont aux points I et I'; joignez ensuite OI et OI', et les points T et T', où ces droites rencontreront la circonférence donnée, seront les points de contact des tangentes demandées: de sorte qu'en joignant AT et AT', le problème sera résolu. Les points T et A sont en effet équidistans de O et de I : donc AT est perpendiculaire sur OI (71); donc cette droite est une tangente. Fig. 68.

Remarquons que cette méthode fournirait encore le moyen de résoudre le problème lors même que la circonférence OB ne pourrait pas être tracée. Seulement, après avoir déterminé le point I, il faudrait chercher un point équidistant de I et de O; la droite qui l'unirait au point A serait perpendiculaire sur le milieu de OI, et serait par conséquent tangente (*a*).

PROBLÈME.

162. *Décrire une circonférence qui soit tangente à trois droites indéfinies* PQ, RS *et* TU. Fig. 69.

Nous avons vu que le lieu des centres de toutes les circonférences tangentes à deux droites est la droite qui partage leur angle en deux parties égales (160) : donc si l'on divise les angles en A en deux parties égales par les droites DE et FG, le centre de la circonférence demandée devra se trouver sur l'une ou sur l'autre de ces droites. Par la même raison il devra aussi se trouver sur l'une des deux droites IK et LM, qui partagent les angles en C en deux parties égales: donc il sera à l'un des points où elles rencontrent les deux premières, c'est-à-dire en O, O', O'', ou O''', de sorte que le problème aura quatre solutions. Abaissons en effet du point O, par exemple, les perpendiculaires OC', OB', OA' sur les droites respectives RS, PQ, TU. Il est évident que si l'on plie la figure le long de OA, les

(*a*) Cette méthode est une application de celle que l'on emploie pour mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur, quand on connaît son grand axe et ses foyers.

droites PQ et RS se recouvriront, puisque les angles SAO et QAO sont égaux : donc les perpendiculaires OC' et OB' coïncideront aussi, sans quoi on pourrait abaisser d'un même point deux perpendiculaires sur une même droite; donc elles sont égales. On verrait de même que OB' = OA', et qu'ainsi, si du point O comme centre, et avec OA' pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente aux trois droites données.

Les trois autres points O', O'' et O''' sont de même les centres de trois circonférences faciles à décrire, et qui seront aussi des solutions de la question.

Quoiqu'on n'ait pas fait usage des angles en B, on ne doit pas penser que les droites qui les partagent en deux parties égales fournissent de nouvelles solutions : car ces droites, étant le lieu des centres de toutes les circonférences tangentes à RS et à TU, devront nécessairement aller passer l'une par les points O et O''', et l'autre par O' et O''.

Si l'on suppose que la droite RS, par exemple, tourne autour du point A en allant de droite à gauche, elle entraînera les droites GF et DE, de sorte que, quand elle sera devenue parallèle à TU, ces droites le seront respectivement à IK et à LM (86, 3.°, et 87) : donc alors les centres O' et O'' n'existeront plus, et ainsi le problème n'admettra plus que deux solutions (*a*).

Enfin si les trois droites étaient parallèles, le problème serait évidemment impossible.

PROBLÈME.

163. *Décrire une circonférence qui touche deux droites*

(*a*) Il est clair que, dans le mouvement de la droite AE autour de A, le point O' s'éloignera de plus en plus du point C, et qu'en même temps l'angle AO'C = O'AE' (86, 1.°) diminuera continuellement. On voit encore que la *limite* de la distance O'C sera l'*infini*, tandis que celle de l'angle O' sera *zéro*. Or quand ces limites seront atteintes, la droite AE sera devenue parallèle à CM : car alors elle ne le rencontrera plus. Ainsi nous pourrons dire que *deux droites sont parallèles quand elles ne se rencontrent qu'à une distance infinie, ou qu'elles font un angle nul.*

On voit donc que *les verticales de deux points peu éloignés l'un de l'autre peuvent être regardées comme parallèles* : car leurs directions iront concourir à une distance extrêmement grande par rapport à leur éloignement, puisque le rayon de la terre a 1432 lieues environ. Le calcul trigonométrique apprend en effet que les verticales de deux points distans de 1111^{m}, c'est-à-dire d'un quart de lieue, vont se croiser au centre de la terre sous un angle plus petit que 36 secondes.

données PQ *et* RS, *et l'une d'elles* PQ, *en un point donné* B. Fig. 70.

La solution de ce problème se déduit trop simplement des principes des n.os 108 et 160 pour nous y arrêter.

PROBLÈME.

164. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

Ce problème admet évidemment quatre solutions, savoir : deux tangentes *externes* et deux tangentes *internes*. Supposons-le résolu, et soit AB une tangente externe. Joignons OA et O'B : ces droites seront perpendiculaires sur cette tangente : donc, si l'on mène par le centre O' la parallèle O'C à AB, la partie AC ainsi déterminée sur le rayon AO sera égale à O'B (84), de sorte que OC sera égale à la différence des rayons des deux circonférences ; mais O'C est perpendiculaire sur OA (82) : donc elle est tangente à la circonférence que l'on décrirait avec le rayon OC (114). Fig. 71.

Décrivez donc une circonférence du point O comme centre avec un rayon OD égal à la *différence* de ceux des deux circonférences données ; menez de O' deux tangentes à cette circonférence, et joignez le centre O avec les points de contact C et C' ; menant enfin des tangentes aux points A et A', où ces droites OC et OC' vont couper la circonférence O, on aura les deux tangentes externes AB et A'B'.

On verra de la même manière que, pour trouver les deux tangentes internes, il faudra décrire du centre O une circonférence avec la *somme* OG des rayons des deux circonférences données, et achever la construction comme précédemment.

Il est facile de voir que les deux tangentes externes vont se couper sur la droite qui joint les centres, et qu'il en est de même pour les deux tangentes internes.

165. Nous avons vu que trois points qui ne sont pas situés en ligne droite déterminaient une circonférence : d'où il suit que deux circonférences ont au plus deux points communs. Deux pareilles circonférences sont dites *sécantes*. Elles sont *tangentes* si elles n'ont qu'un point commun.

THÉORÈME.

166. *Lorsque deux circonférences se coupent, la droite*

qui joint les centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

Fig. 72. En effet, si l'on élève une perpendiculaire sur le milieu de cette corde AB, elle ira passer par les deux centres O et O' (103) : donc elle aura deux points communs avec la droite OO', et coïncidera par conséquent avec elle ; donc OO' est elle-même cette perpendiculaire élevée sur le milieu de AB.

THÉORÈME.

167. *Lorsque deux circonférences sont tangentes, le point de contact est sur la droite qui joint les centres.*

Fig. 72 et 73. Soient en effet O et O' les centres de deux circonférences qui se coupent, et concevons que la seconde se meuve : il arrivera un instant où les deux points d'intersection A et B se seront réunis en A, et alors les deux circonférences seront devenues tangentes. Or la droite qui joint les centres n'aura pas cessé d'être perpendiculaire sur le milieu de la corde commune ; et, comme cette corde est alors réduite au point A, ce point doit se trouver sur la ligne des centres. Donc, etc. (*a*).

168. Scholie. Le théorème précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsque deux ciroonférences sont tangentes, extérieurement ou intérieurement, la distance des centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.

Fig. 75. En effet le point de contact A, devant se trouver sur la droite qui joint les centres (167), sera situé entre les deux centres, ou les laissera tous deux d'un même côté ; mais alors il est évident que, dans le premier cas, leur distance OO' est égale à la somme OA + O'A des deux rayons, et que dans le second elle est égale à leur différence OA — O'A.

(*a*) Si l'on veut démontrer ce théorème *à priori*, on dira : Supposons que

Fig. 74. le point de contact soit en M, hors de la droite OO' qui joint les centres O et O'. Abaissons MA, perpendiculaire sur OO', et prolongeons-la d'une quantité AM' = AM. Il est clair que de cette manière la droite OO' est perpendiculaire sur le milieu de MM', et qu'ainsi les centres O et O' sont chacun également éloignés de ses extrémités M et M' : donc les deux circonférences passeront aussi par le point M' ; donc elles auront deux points communs, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc le point de contact M ne peut pas être hors de la droite OO'.

THÉORÈME.

169. Réciproquement, *deux circonférences sont tangentes lorsqu'elles ont un point commun A sur la droite qui joint les centres.*

Nous considèrerons deux cas, selon que le point commun A sera entre les deux centres O et O', ou sur le prolongement de la droite qui les unit.

1.° Joignons les deux centres O et O' avec un point quelconque M de la circonférence O' : nous formerons ainsi la brisée OMO', qui sera plus grande que la droite OAO'. Retranchons d'une part MO' et de l'autre son égale O'A : il restera OM > OA : donc tous les points de la circonférence O' sont, à l'exception de A, extérieurs à la circonférence O ; donc ces deux circonférences se touchent *extérieurement* en A.

2.° Joignons encore les centres O et O' avec un point quelconque M de la circonférence O'. La droite OM est plus courte que la brisée OO'M, ou que son égale OA : ainsi tous les points de la circonférence O' sont intérieurs à la circonférence O ; donc ces deux circonférences se touchent *intérieurement* en A.

On pourrait encore démontrer cette réciproque par la réduction à l'absurde (122), et en s'appuyant sur le théorème du n.° 166.

170. Scholie. Cette réciproque peut s'énoncer comme il suit :

Deux circonférences sont tangentes extérieurement ou intérieurement lorsque la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.

1.° Supposons que la distance OO' des centres soit égale à la somme des rayons ; soit OA l'un des rayons, l'autre sera nécessairement O'A : donc les deux circonférences passeront par le point A de la droite OO' ; donc elles seront tangentes (169). Fig. 75.

2.° Supposons que la distance OO' des centres soit égale à la différence des rayons, le plus grand se composera alors du plus petit et de cette distance : donc si OB est ce plus grand rayon, le plus petit sera nécessairement O'B ; donc les deux circonférences passeront alors par le point B de la droite OO' ; donc elles seront tangentes (169).

171. Corollaire. Il suit de cette proposition et de la précédente (167 et 169) que *la droite indéfinie* OA *est le lieu géométrique des centres de toutes les circonférences tangentes* Fig. 75.

à la circonférence O *au point* A; et si par le point A on mène une perpendiculaire TT' à OA, cette droite sera une tangente commune à toutes ces circonférences. Or chacune de ces circonférences enveloppe toutes celles dont les centres sont compris entre le sien et le point A : donc ces circonférences s'approchent d'autant plus de cette tangente que leurs rayons sont plus grands; de sorte qu'on peut regarder la tangente TT' comme leur limite, c'est-à-dire comme celle dont le rayon est infini.

THÉORÈME.

172. *Pour que deux circonférences se coupent, il faut et il suffit que la distance de leurs centres soit plus petite que la somme de leurs rayons, et plus grande que leur différence.*

Prouvons d'abord que ces deux conditions sont nécessaires, et nous ferons voir ensuite qu'elles sont suffisantes.

1.° Si la distance des centres n'est pas plus petite que la somme des rayons, elle sera égale à cette somme ou plus grande qu'elle. Mais, dans le premier cas, les deux circonférences seraient tangentes extérieurement (170), et dans le second elles
Fig. 76. seraient extérieures : car O et O' étant les deux centres, si OA est le rayon de la première, celui de la seconde sera plus petit que O'A, puisque nous supposons que OO' surpasse la somme des deux rayons; donc cette seconde circonférence sera enveloppée de toutes parts par celle que l'on décrirait avec le rayon O'A; mais celle-ci est tangente extérieurement à la circonférence O; donc nos deux circonférences OA et O'A' sont extérieures; donc pour qu'il y ait intersection, il faut que la distance des centres soit moindre que la somme des rayons.

2.° Si la distance des centres n'est pas plus grande que la différence des rayons, elle sera égale à cette différence ou plus petite qu'elle. Mais dans le premier cas, les deux circonférences seraient tangentes intérieurement (170); et dans le second, l'une
Fig. 77. serait enveloppée par l'autre. En effet, la distance OO' des centres étant supposée plus petite que la différence des rayons, le plus grand rayon surpasse la somme faite de l'autre rayon, et de cette distance OO' : donc si OA est le rayon de la plus grande circonférence, celui de la seconde sera plus petit que O'A; donc cette seconde circonférence sera enveloppée de toutes parts par

la circonférence que l'on décrirait avec le rayon O'A; mais celle-ci est tangente intérieurement à la circonférence OA; donc cette dernière enveloppe de toutes parts la circonférence O'A'. Donc, pour qu'il y ait intersection, il faut que la distance des centres surpasse la différence des rayons.

Donc, *pour que deux circonférences se coupent, il faut que la distance des centres soit moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence.*

Je dis maintenant que ces deux conditions sont *suffisantes :* car si la première est remplie, la plus petite circonférence O'A' Fig. 76.
ne sera ni extérieure à la plus grande OA, ni tangente extérieurement à cette plus grande, sans quoi la distance des centres serait plus grande que la somme des rayons ou égale à cette somme; et si la seconde condition est satisfaite, la petite circonférence O'A' ne sera ni intérieure à la grande OA, ni tan- Fig. 77.
gente intérieurement à cette plus grande : car alors la distance des centres serait moindre que la différence des rayons ou égale à cette différence. La circonférence O'A' sera donc en partie intérieure et en partie extérieure à la circonférence OA; donc *elle la coupera.*

173. Scholie i. Si l'on ignore lequel des deux rayons est le plus grand, il faudra vérifier que chaque rayon est plus petit que la somme faite de l'autre rayon et de la distance des centres, pour être sûr que la seconde condition est satisfaite.

174. Scholie ii. On voit maintenant pourquoi, lorsque nous avons voulu élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite (72), nous avons pris une ouverture de compas plus grande que la moitié de cette droite : c'est que de cette manière la somme des deux rayons est plus grande que la droite donnée, c'est-à-dire que la distance des centres; et, comme d'ailleurs ils sont égaux, leur différence est nulle, et par conséquent moindre que cette même distance. Ainsi les deux circonférences se sont nécessairement coupées.

175. La proposition du n.° 169 fournit le moyen de composer avec des arcs de cercle différentes courbes dont plusieurs sont très-usitées dans l'architecture, telles que *le talon, la doucine, la volute*, etc. Le talon est formé de deux arcs égaux et tangens, l'un *concave*, l'autre *convexe*. De plus, ces arcs coupent à angles droits les droites AB et CD qui limitent les Fig. 78.

filets dont le talon est destiné à réunir les saillies. En conséquence, pour le tracer, on joindra les points B et D où les arcs doivent se terminer par la droite BD, dont on prendra le milieu O, qui sera ainsi le point de contact de ces arcs. Si donc on élève la perpendiculaire IK sur le milieu de OB, l'arc décrit du centre I avec le rayon IB, aura sa tangente en B perpendiculaire sur AB. On joindra ensuite IO, et l'on prolongera cette droite jusqu'à la rencontre de CD en L : ce point sera le centre du second arc.

Fig. 79. La doucine ne diffère du talon qu'en ce que les deux arcs sont tangens aux filets en B et en D : de sorte que, pour la décrire, on élèvera encore une perpendiculaire sur le milieu de OB; et le point I, où elle coupera la perpendiculaire menée par le point B sur AB, sera le centre du premier arc. On aura ensuite celui du second, en prolongeant IO jusqu'à sa rencontre en L, avec la perpendiculaire élevée en D sur CD.

Fig. 80. Pour tracer la volute, menez par l'origine A de cette courbe deux droites perpendiculaires entre elles, et prenez les deux distances égales AB et AC, mais d'autant plus petites que les *spires* devront être plus rapprochées les unes des autres. Par les points B et C, menez des parallèles à AC et à AB, et prenez DB' égal à DB. Cela fait, des points B, A, C, D, B, A, C, D, B, etc., pris successivement pour centres, et avec les rayons respectifs BB', AA', CC', DD', BB'', AA'', CC'', DD'', BB''', etc., décrivez les quadrans B'A', A'C', C'D', D'B'', B''A'', A''C'', C''D'', D''B''', etc. Chacun de ces quadrans sera tangent avec le suivant, de sorte que tous ces arcs se *raccorderont*. Maintenant, pour achever la spirale ou volute, terminez la demi-circonférence A'B'E, et ensuite décrivez successivement sur BE et BA deux demi-circonférences.

PROBLÈME.

176. *Décrire une circonférence qui touche une circonférence donnée* O *en un point donné* A, *et de plus soit tangente à une droite donnée* BC.

Fig. 81.

Ce problème se ramène immédiatement à celui du n.° 163, en menant au point A la tangente AK : car il est clair que le cercle qui sera tangent à AK au point A, et touchera de plus BC, résoudra le problème proposé.

PROBLÈME.

177. *Décrire une circonférence qui touche en un point donné* A *à une circonférence donnée* O, *et qui passe par un second point donné* C. Fig. 82.

L'inconnue de la question est évidemment le centre de la circonférence demandée; or la droite OA est le lieu des centres de toutes les circonférences tangentes en A à la circonférence O: donc le centre demandé se trouve sur OA. Il doit aussi se trouver sur la droite DF, élevée perpendiculairement sur le milieu de CA : car DF est le lieu de tous les points équidistans de C et de A; donc il est à l'intersection O' des droites OA et DF; donc la circonférence décrite de O' comme centre, avec le rayon O'A, résoudra le problème.

Le problème serait impossible si la droite DF était parallèle à OA, ce qui arriverait si CA était perpendiculaire à OA, c'est-à-dire tangente à la circonférence donnée (114).

Ce problème aurait pu se ramener à celui du n.° 116.

PROBLÈME.

178. *Décrire une circonférence d'un rayon donné* R, *qui soit tangente à une droite* CB *et à une circonférence* OA *donnée.* Fig. 83.

L'inconnue de la question est encore le centre de la circonférence demandée; or les lieux respectifs des centres de toutes les circonférences tangentes extérieurement et intérieurement à la circonférence O, sont les deux circonférences OF et OG, décrites du point O comme centre avec les rayons $OF = OA + R$, et $OG = OA - R$ (170) : donc le centre demandé se trouve sur ces deux circonférences. D'un autre côté il doit être distant de CB de la quantité R : donc il appartient à l'une ou à l'autre des parallèles MN et PQ menées à CB, à la distance $OI = OK = R$ de cette droite; donc il est un des points d'intersection de ces parallèles avec ces circonférences. Or chacune peut rencontrer chaque circonférence en 2, 1 ou *zéro* points : donc le problème peut avoir depuis *zéro* jusqu'à 8 solutions.

PROBLÈME.

179. *Décrire une circonférence qui touche une droite*

Fig. 84. *donnée* **AB** *en un point donné* **C**, *et soit en outre tangente à une circonférence donnée* **O**.

Soit O′ le centre inconnu de la circonférence demandée : ce point se trouvera évidemment sur la perpendiculaire indéfinie DD′, menée à AB par le point C. D'un autre côté, si les deux circonférences doivent être tangentes extérieurement, O′O sera la somme des deux rayons : par conséquent, si l'on prend CD égal au rayon de O, le centre O′ sera également distant des points O et D, de sorte qu'il sera déterminé par l'intersection de DD′ avec la perpendiculaire FF′ élevée sur le milieu de OD. Mais si les deux circonférences doivent se toucher intérieurement, la distance de leurs centres sera la différence de leurs rayons ; et conséquemment si l'on prend CD′ égal au rayon de la circonférence O, le centre inconnu sera équidistant des points O et D′, et se trouvera ainsi à l'intersection O″ de DD′ avec la perpendiculaire GG′ élevée sur le milieu de OD′.

On voit donc que le problème admet en général deux solutions si, comme nous l'avons supposé, le point C est extérieur à la circonférence donnée. Cependant si la droite AB était tangente à la circonférence O, il est clair que OD′ serait alors parallèle à cette droite (84), et qu'ainsi le centre O″ s'éloignerait à l'infini [162 (*a*)]. Dans ce cas la circonférence O″C dégénèrerait dans la tangente AB (171).

Si le point C était sur la circonférence O, CD et CD′ seraient alors égales à OC, et ainsi les points O′ et O″ coïncideraient avec C : donc les circonférences O′C et O″C se réduiraient au point C.

Si le point C est intérieur à la circonférence O, la construction réussit toujours ; mais les deux circonférences sont intérieures à la circonférence donnée.

Enfin si AB est tangente à la circonférence O, et que C soit précisément le point de contact, le problème admet une infinité de solutions (171).

180. Les problèmes que nous venons de résoudre sont d'une grande importance pour les mécaniciens, qui ont souvent besoin de transformer un mouvement dans un autre, et toujours de transmettre à l'*outil* le mouvement que le moteur imprime au *récepteur*, c'est-à-dire à la pièce sur laquelle s'exerce son action.

Si une règle *presse* contre la circonférence d'une roue mo-

bile autour de son centre supposé fixe, on sent très-bien que la roue ne pourra tourner sans pousser la règle dans le sens de son mouvement : de sorte que si l'on veut faire mouvoir un point en ligne droite, il suffira de diriger la règle sur ce point, ce qui, dans le dessin de la machine, exige que l'on sache mener d'un point donné hors d'une circonférence une tangente à cette courbe (158 et 161). Mais le simple frottement ne sera plus suffisant pour faire mouvoir la règle, si la résistance que son extrémité doit vaincre est un peu considérable. Alors on arme la règle et la circonférence de la roue de dents d'égale grosseur et également espacées, de sorte que les dents de l'une *engrenant* avec celles de l'autre, la règle et la roue ne peuvent se mouvoir isolément. Telle est, par exemple, la machine connue sous le nom de *cric*. On rencontre encore ce système d'une *crémaillère* et d'une *roue dentée* dans une foule de machines ; par exemple, dans les scieries mécaniques. La poutre que l'on veut débiter est portée sur un chariot dont les roues se meuvent sur les *rails* d'un petit chemin de fer, et au dessous duquel est fixée une crémaillère qui engrène avec une roue dentée mobile autour de son centre. La poutre est ainsi constamment appuyée contre les tranchans de plusieurs scies disposées à égales distances les unes des autres, et qui, en se mouvant verticalement, la divisent en planches de même épaisseur.

Si deux circonférences mobiles autour de leurs centres sont tangentes, et que l'une vienne à tourner, l'autre tournera aussi, mais en sens contraire, sans qu'elles cessent de se toucher au même point : donc une règle qui sera pressée par la seconde roue imprimera à l'objet sur lequel son extrémité s'appuiera, un mouvement rectiligne et contraire à celui de la première. On voit ainsi que dans le tracé d'un pareil système on pourra avoir à résoudre l'un ou l'autre des problèmes des n.os 176, 178 et 179.

Enfin si l'on doit transmettre un mouvement à une assez grande distance, au lieu d'employer un système de roues dentées qui engrènent, on peut faire usage seulement de deux roues en les enveloppant d'une courroie ou d'une chaîne sans fin fortement tendue, de sorte que l'une des deux roues venant à tourner, l'autre tournera aussi dans le même sens ou en sens contraire, suivant que la courroie sera tangente extérieurement ou intérieurement aux circonférences des roues. Il est donc utile de savoir mener une tangente commune à deux circonférences (164).

DEUXIÈME PARTIE.

DES SURFACES.

PREMIÈRE SECTION.

DES SURFACES PLANES LIMITÉES.

CHAPITRE PREMIER.

DES POLYGONES.

181. *On appelle* POLYGONE *une portion de plan terminée de toutes parts par des lignes droites que l'on nomme les* CÔTÉS *du polygone.*

182. Si une ligne droite, tracée d'une manière quelconque, ne peut rencontrer le *périmètre,* c'est-à-dire le contour d'un polygone, en plus de deux points, on dit que ce polygone est *convexe* ou à *angles saillans;* et dans le cas contraire il est *concave*
Fig. 85. ou à *angles rentrans.* ABCDEF est un polygone convexe, et GHIKLMN en est un concave. Les angles saillans de celui-ci sont G, H, K, L, M; et I et N sont ses angles rentrans. Il faut entendre par l'angle rentrant I toute la portion du plan du polygone qui serait parcourue par le côté indéfiniment prolongé IK, s'il tournait autour de I de manière que son point *k* vînt, en décrivant l'arc *klh*, se rabattre en *h*. Ainsi cet angle est égal à quatre droits, moins l'angle KIH.

On appelle *diagonale* la droite qui joint les sommets de deux angles non adjacens : telles sont les droites AD et MK.

Quand nous parlerons d'un polygone, il s'agira toujours d'un polygone convexe, à moins que nous n'exprimions précisément le contraire.

183. Nous appellerons *polygone inscrit à un cercle* celui dont tous les angles ont leurs sommets sur sa circonférence; en même temps on dit que le cercle est *circonscrit* à ce polygone.

Un polygone est *circonscrit à un cercle* lorsque tous ses côtés sont des tangentes à la circonférence. Le cercle est alors *inscrit* dans ce polygone.

184. On distingue les polygones d'après le nombre de leurs côtés ou de leurs angles, ce qui revient tout-à-fait au même, et on leur a donné des noms qui désignent précisément le nombre de ces angles ou de ces côtés. Ainsi on appelle

Triangles les polygones de	3 côtés;
Quadrilatères...........	4
Pentagones.............	5
Hexagones.............	6
Heptagones.............	7
Octogones..............	8
Ennéagones.............	9
Décagones..............	10
Endécagones............	11
Dodécagones............	12
Etc.	

On ne pousse pas ordinairement cette nomenclature au-delà du dodécagone, si ce n'est pour le *pentédécagone*, qui est le polygone de 15 côtés.

185. On conçoit très-bien que deux figures, un cercle et un triangle, par exemple, peuvent renfermer entre leurs côtés des portions égales de l'étendue, sans cependant être superposables. Nous exprimerons qu'il en est ainsi en disant que ces figures sont *équivalentes*, et nous réserverons la dénomination de figures *égales* pour celles qui pourront été superposées.

Les triangles et les quadrilatères ont des propriétés qui leur sont particulières : nous allons les étudier d'abord, et nous verrons ensuite quelles sont les propriétés communes aux polygones de tous les ordres.

DU TRIANGLE.

THÉORÈME.

186. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

Nous avons vu que par trois points non en ligne droite on pouvait toujours faire passer une circonférence : donc on pourra circonscrire un cercle à tout triangle (183). Or chacun des

Fig. 86. angles A, B, C a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; et, comme la somme de ces moitiés est une demi-circonférence, c'est-à-dire la mesure de deux angles droits, il se trouve ainsi démontré que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante, en s'appuyant sur l'égalité des angles alternes-internes et des angles correspondans. Pour cela je prolonge le côté CB, et je mène par le point B la droite BD, parallèle à AC. La somme des trois angles du triangle est égale à celle des trois angles formés autour du point B : car d'abord l'angle ABC est commun à toutes deux; l'angle A est égal à l'angle ABD comme alternes-internes, par rapport aux parallèles AC et BD et à la sécante AB; et l'angle C est égal à DBF, son correspondant par rapport aux mêmes parallèles et à la sécante CF. Mais la somme des trois angles formés autour du point B vaut deux droits : donc celle des trois angles du triangle ABC vaut aussi deux droits.

Ce théorème fournit un nouveau moyen de vérifier un graphomètre. Il n'y a pour cela qu'à former un triangle sur le terrain, en plaçant des jalons à ses sommets, et à en mesurer successivement les trois angles. Si leur somme ne diffère de 180° que de une ou deux minutes, l'instrument est bon.

187. Corollaire i. Chaque angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres (57) : ainsi quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre, et les deux triangles sont équiangles entre eux.

188. Corollaire ii. *L'angle* extérieur ABF *d'un triangle (on appelle ainsi celui qui est formé par un côté et le prolongement d'un autre) est égal à la somme des deux intérieurs opposés* A et C : car cette somme des angles A et C a pour supplément l'angle ABC, qui est aussi le supplément de ABF (51).

189. Corollaire iii. Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.

190. Ce dernier corollaire conduit à une division des triangles en trois classes, d'après la nature de leurs angles. *On nomme triangle* rectangle *celui qui a un angle droit, et on appelle*

HYPOTHÉNUSE *le côté opposé à l'angle droit.* Le triangle ABC est un triangle rectangle dont BC est l'hypothénuse. Il est évident que dans un triangle rectangle les deux angles aigus sont complémentaires (92). Fig. 87.

191. Cette propriété du triangle rectangle donne un moyen facile d'abaisser une perpendiculaire sur une droite AB par un point donné G hors de cette droite, au moyen du graphomètre. Pour cela on placera cet instrument en un point quelconque C de la droite AB, et on mesurera l'angle GCA que forme avec cette droite un rayon visuel dirigé sur un jalon planté en G. Transportant ensuite le graphomètre au point G, on pointera l'alidade fixe sur un jalon placé au point C, et on amènera l'alidade mobile à faire avec l'autre un angle complémentaire de celui GCA que l'on a observé. Il ne s'agira plus alors que de faire planter sur AB un jalon qui soit en même temps dans la direction de l'alidade mobile. Fig. 21.

192. On appelle triangle *acutangle* celui dont les trois angles sont aigus, et triangle *obtusangle* celui qui a un angle obtus. Tels sont ABC et DEF. Fig. 88.

193. On distingue aussi les triangles d'après les rapports qui existent entre leurs côtés. Ainsi *on appelle triangle* SCALÈNE *celui dont les trois côtés sont inégaux;* ISOCÈLE *celui dont deux côtés sont égaux*, et alors le troisième côté est dit la *base* du triangle, et le sommet de l'angle opposé à la base est le *sommet* du triangle.

Il suit du n.° 71 que la droite qui va du sommet d'un triangle isocèle au milieu de sa base est perpendiculaire à cette base. Cette droite se nomme *la hauteur* du triangle. On voit donc qu'*un triangle isocèle est déterminé lorsqu'on connaît sa base et sa hauteur.* Les charpentiers font usage de cette propriété dans le tracé des *fermes* destinées à supporter les toitures de nos maisons: car ces fermes ont la figure de triangles isocèles dont la base est déterminée par la distance des deux murs parallèles sur lesquels le toit doit s'appuyer, et dont la hauteur dépend de la pente que l'on veut donner à ce toit (*a*).

(*a*) La pente que l'on doit donner à un toit n'est point du tout indifférente: car on conçoit qu'il entrera d'autant moins de bois dans une charpente que

Enfin *on nomme triangle* ÉQUILATÉRAL *celui qui a ses trois côtés égaux.*

THÉORÈME.

194. *De deux angles d'un triangle celui-là est le plus grand qui est opposé à un plus grand côté; et réciproquement, le plus grand de deux côtés est celui qui est opposé à un plus grand angle.*

Fig. 86. En effet si le côté AC est plus grand que le côté AB, il est plus près du centre que lui (123), et ainsi AB ne peut être situé entre le centre et le côté AC : donc l'arc AB est moindre qu'une demi-circonférence; donc il est plus petit que l'arc AC (120); donc la mesure de l'angle B surpassera celle de l'angle C; donc l'angle B est plus grand que C.

Si l'angle B est plus grand que l'angle C, la mesure du premier surpassera celle du second, et ainsi l'arc AC sera plus grand que l'arc AB. Si donc ils sont de même espèce, le côté AC sera plus grand que le côté AB (119); s'ils sont d'espèce différente, c'est-à-dire si l'arc AC est plus grand qu'une demi-circonférence, l'arc ABC sera de même espèce que l'arc AB; et, comme il est plus grand que lui, le côté AC sera encore plus grand que le côté AB.

Ce théorème peut se démontrer encore très-simplement en s'appuyant sur la proposition du n.° 69.

Fig. 89. Supposons, en effet, que le côté AC soit plus grand que AB. Il suit immédiatement de cette hypothèse que la perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de CB, ira couper AC entre A et C, sans quoi le point A serait plus près de C que de B (69) : de sorte qu'en joignant EB, cette droite sera tracée dans l'angle ABC; mais nous avons vu, dans la démonstration du n.° 66, que les

---

cette pente sera moins grande. Feu Rondelet, habile architecte, qui a examiné cette question avec un soin particulier, a donné la règle suivante : *Pour trouver la pente qu'il convient de donner à une toiture en tuiles creuses, retranchez de la latitude du lieu où elle doit être établie celle 23° 28' du tropique. Pour une couverture en tuiles plates, augmentez ce reste de son quart, ou de son tiers si vous devez employer des ardoises.* On verra, d'après cette règle, que, pour la latitude 46° 42', qui est celle du parallèle moyen de la France, la pente d'une couverture en tuiles creuses doit être de 46° 42' — 23° 28' = 23° 14'; en tuiles plates, de 23° 14' + 5° 48' = 29° 2'; et en ardoises, de 23° 14' + 7° 45' = 30° 59'.

angles ECB et EBC sont superposables : donc l'angle ECB est plus petit que ABC.

Supposons actuellement que l'angle ABC soit plus grand que ACB. Si l'on élève encore une perpendiculaire sur le milieu de CB, et que l'on joigne EB, l'angle EBC sera égal à ACB, et ainsi la droite EB sera tracée dans l'angle ABC : donc le point A est à droite de la perpendiculaire ED, et ainsi AC est plus grand que AB.

195. COROLLAIRE. Dans un triangle rectangle l'hypothénuse est le plus grand des côtés, et dans un triangle obtusangle le côté opposé à l'angle obtus est le plus grand (189).

THÉORÈME.

196. *Dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ; et, réciproquement, si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront égaux.*

Cette proposition se démontre comme la précédente, en circonscrivant un cercle au triangle, ou en s'appuyant sur le théorème du n.° 69.

197. COROLLAIRE. *Un triangle équilatéral est aussi équiangle, et réciproquement.*

On voit encore que chaque angle d'un triangle équilatéral est les deux tiers d'un droit, de sorte qu'il a pour mesure un arc de 60°.

198. Cette propriété qu'a l'angle d'un triangle équilatéral d'avoir pour mesure un arc de 60 degrés, étant combinée avec celle énoncée au n.° 170, fournit un moyen très-simple de tracer la courbe surbaissée que l'on nomme *anse de panier*, et dont on fait quelquefois usage dans la construction des voûtes et des ponts. Cette anse de panier se compose de trois arcs AG, GK et KB, de 60° chacun ; les deux arcs extrêmes ont même Fig. 90.
rayon, et sont tangens aux *pieds-droits* de la voûte, c'est-à-dire aux deux murs verticaux AA' et BB', sur lesquels cette voûte doit s'appuyer, et de plus ils doivent se *raccorder* avec l'arc moyen GK, c'est-à-dire qu'aux points de raccordement G et K ils doivent avoir mêmes tangentes. Les données de la question sont la largeur AB de l'arcade et la hauteur CD que l'on veut

donner à la voûte au dessus de AB. Voici une construction très-simple de la courbe demandée.

Des points A et C comme centres, et avec AC pour rayon, décrivez deux arcs qui se couperont en E; joignez AE et EC, et vous aurez ainsi le triangle équilatéral EAC, dans lequel l'angle A vaudra par conséquent 60°; prenez ensuite CF=CD, et joignez DFG; enfin prenez AH et BI égaux à AG; menez GH, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre en O avec CD, et tirez KIO : les points H, O et I seront les centres des trois arcs.

En effet, l'angle A valant 60°, les deux autres angles G et H du triangle AGH vaudront ensemble 180° — 60° = 120°; et, comme ils sont égaux, puisque le triangle AGH est isocèle (196), chacun d'eux vaudra 60° : donc l'arc AG, décrit du point H comme centre, et avec AH pour rayon, sera bien de 60°. Il en sera de même de l'arc BK : car BI étant égal à AH, si l'on plie la figure le long de OD, le point H tombera sur I, le point G sur K, et l'arc AG recouvrira exactement l'arc BK. D'un autre côté, l'angle HOI, supplément de la somme des deux angles H et I, qui valent chacun 60°, vaudra par conséquent 180° — 120° = 60°, de sorte que l'arc GK, qu'il comprend entre ses côtés, sera bien aussi de 60°. De plus cet arc se raccordera aux points G et K avec les arcs AG et BK (170), et ceux-ci sont tangens aux pieds-droits AA' et BB' (114), de sorte qu'il ne s'agit plus que de montrer que l'arc GK passe par le point D. Or l'angle F=D : car le triangle CDF est isocèle; mais l'angle F est égal à son correspondant G (la droite GH est parallèle à CF : car les angles correspondans GHA et FGA sont égaux comme valant chacun 60°) : donc l'angle DGO=GDO; donc DO=GO (196).

L'anse de panier dont nous venons de donner la description a un défaut très-grave lorsque la hauteur CD est beaucoup plus petite que la moitié de son diamètre AB. On sent en effet que, le point G étant alors très-près de A, il y a une grande différence entre le rayon de l'arc moyen et ceux des arcs extrêmes; de sorte que la courbure de l'anse de panier changeant d'une manière fort notable aux points G et K, la forme de la courbe devient désagréable à l'œil. On évite cet inconvénient en composant l'anse de panier de 5, de 7, et même quelquefois de 9 et de 11 arcs de cercle, tels que les arcs équidistans de

l'arc moyen soient égaux entre eux. Nous renverrons aux traités spéciaux d'architecture pour le tracé de ces anses de panier.

THÉORÈME.

199. *Deux triangles* ABC, A'B'C' *sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal* B = B', *compris entre deux côtés égaux chacun à chacun* AB *et* A'B', BC *et* B'C'. Fig. 91.

Portons en effet le triangle A'B'C' sur le triangle ABC en plaçant les points B' et C' respectivement sur les points B et C. Le côté B'C' coïncidera ainsi avec son égal BC. Par conséquent, puisque l'angle B' est égal à l'angle B, le côté A'B' prendra la direction AB; et, comme ils sont égaux, le point A' tombera nécessairement sur le point A. Le côté A'C' aura ainsi mêmes extrémités que AC : donc ces deux côtés coïncideront; donc le triangle A'B'C' recouvrira exactement le triangle ABC; donc il lui est égal.

200. Corollaire. Nous appellerons *angles homologues* deux angles qui sont opposés à des côtés égaux, et *côtés homologues* ceux qui sont opposés à des angles égaux. Cela posé, il suit de la superposition des deux triangles ABC et A'B'C' que les angles B et C sont respectivement égaux à leurs homologues B' et C'; et que le côté BC est égal à son homologue B'C' : donc quand deux triangles seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, on devra en conclure que leurs parties homologues sont égales.

THÉORÈME.

201. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal* AB = A'B', *adjacent à deux angles égaux chacun à chacun* A *et* A', B *et* B'.

Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, en mettant les points A' et B' respectivement sur les points A et B. Le côté A'B' coïncidera ainsi avec son égal AB. Par conséquent, puisque l'angle B' est égal à l'angle B, le côté C'B' prendra la direction CB, et le point C' se trouvera ainsi sur quelque point de la droite indéfinie BC. De même, puisque l'angle A' est égal à l'angle A, le côté A'C' prendra la direction AC, et le point C' ira encore tomber sur quelque point de la droite AC : donc ce point C', devant se trouver à la fois sur les deux droites BC

et AC, tombera nécessairement à leur point de section C. Donc le triangle A'B'C' recouvrira exactement le triangle ABC; donc il lui est égal.

202. Corollaire I. Quand deux triangles sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, leurs parties homologues sont égales : car elles sont superposables, puisque les triangles le sont.

203. Corollaire II. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun :* car ils sont alors équiangles (187), et satisfont ainsi aux conditions énoncées dans le n.° 201.

204. Corollaire III. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypothénuse égale et un angle égal.*

THÉORÈME.

Fig. 92. 205. *Si deux triangles* ABC, A'B'C' *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = A'B', et AC = A'C', *que l'angle* A *compris entre les deux côtés du premier soit plus grand que l'angle* A' *compris entre les deux côtés du second, le troisième côté* BC *du premier triangle surpassera le troisième côté* B'C' *du second.*

En effet, faisons au point A, et avec AC, l'angle DAC égal à B'A'C'; prenons AD = A'B'; et joignons CD. Nous formerons ainsi le triangle CAD, qui sera égal à A'B'C' : car ils auront un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (199); donc le côté CD sera égal à son homologue B'C' (200); de sorte qu'il s'agira seulement de démontrer que BC > CD. Pour le faire voir, partageons l'angle BAD en deux parties égales par la droite AI, et joignons ID : les deux triangles BAI et DAI seront égaux (199), et par conséquent le côté DI sera égal à son homologue BI. Mais la droite CD est plus courte que la brisée CI + ID, ou que CI + BI; donc CD est plus petite que CB : car l'angle BAC étant plus grand que B'A'C' ou que son égal CAD, la droite AI, qui divise l'angle BAD en deux parties égales, est nécessairement tracée dans l'angle BAC, et va ainsi couper BC entre B et C; donc BI + IC = BC.

THÉORÈME.

206. Réciproquement, *si deux triangles* ABC, A'B'C', *ont*

deux côtés égaux chacun à chacun, AB=A'B', et AC=A'C', *et que le troisième côté* BC *du premier soit plus grand que le troisième côté* B'C' *du second, l'angle* A, *opposé au troisième côté du premier triangle, surpassera son correspondant* A' *dans le second.*

Cette réciproque se démontrera d'après le principe que nous avons établi au n.° 122, en s'appuyant sur les théorèmes des n.os 199 et 205.

THÉORÈME.

207. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun*, AB=A'B', AC=A'C', et BC=B'C'. Fig. 91.

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de faire voir que l'angle A, par exemple, est égal à son homologue A': car alors les deux triangles auront un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et seront par conséquent égaux. Or, si l'angle A n'est pas égal à l'angle A', il sera plus grand ou plus petit que lui; si A est plus grand que A', comme les côtés qui le comprennent sont respectivement égaux à ceux de A', on devra en conclure que BC est plus grand que B'C' (205), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc l'angle A n'est pas plus grand que A'. On prouverait de même qu'il n'est pas plus petit que A': donc il lui est égal; donc les triangles A'B'C' et ABC sont égaux.

On peut donner de cette proposition la démonstration suivante, qui a l'avantage d'être indépendante des théorèmes énoncés aux n.os 199 et 205.

Plaçons le triangle A'B'C' au dessous de ABC, de manière que les deux sommets B' et C' coïncident avec leurs homologues B et C; et soit D la position que prendra ainsi le troisième sommet A', de sorte que BD=BA, et que CD=CA. Chacun des points B et C sera ainsi équidistant de A et de D; et par conséquent, si l'on joint AD, la droite BC sera perpendiculaire sur le milieu de AD (71): donc, si l'on plie la figure le long de BC, AI se rabattra sur ID (48), et le point A sur le point D; donc les deux triangles ABC et DAC se recouvriront parfaitement; donc ils sont égaux. Mais ADC n'est autre que A'B'C': donc ABC=A'B'C'.

208. Corollaire. Quand deux triangles sont égaux comme

ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, on doit en conclure que leurs angles homologues sont égaux.

209. Scholie. Il suit de ce qui précède qu'il y a trois cas dans lesquels deux triangles sont égaux : ce sont ceux énoncés aux n.os 199, 201 et 207, et dans chaque cas on conclut de leur égalité que les parties homologues de ces triangles sont égales. Par conséquent *lorsque l'on voudra établir l'égalité de deux angles ou de deux droites, il suffira de vérifier que ces angles ou ces droites sont des parties homologues de triangles égaux.*

PROBLÈME.

210. *Construire un triangle dont on connaît deux côtés a et b et l'angle compris* C.

Fig. 93. Tracez une droite CB égale au côté *a*, par exemple; puis faites au point C un angle égal à l'angle donné C, et prenez sur le second côté de cet angle une distance CA $=b$. Enfin tirez AB, et le problème sera résolu.

Ce problème est toujours possible.

PROBLÈME.

211. *Construire un triangle dont on connaît un côté b et deux angles* A *et* C.

Il peut se présenter deux cas, selon que le côté donné est adjacent aux deux angles donnés, ou qu'il est opposé à l'un d'eux.

Fig. 94. *Premier cas.* Tirez la droite AC égale au côté donné *b*; faites à ses extrémités des angles égaux aux deux angles donnés A et C, et le triangle ABC ainsi formé résoudra évidemment le problème.

Second cas. Aux deux extrémités d'une droite quelconque
Fig. 95. AD faites des angles égaux aux angles donnés, et le troisième angle F du triangle AFD ainsi formé sera le troisième angle du triangle demandé (187) : ce sera donc l'un des angles adjacens au côté donné. Si donc A est l'autre, on prendra sur la droite indéfinie AF une longueur AC égale au côté donné *b*; et, menant par le point C une parallèle BC au côté FD, le triangle ABC, que l'on obtiendra ainsi, résoudra le problème.

Le problème sera toujours possible si la somme des deux angles donnés est moindre que deux droits.

212. Si l'on propose de construire un triangle rectangle, connaissant un de ses angles aigus, et son hypothénuse *en grandeur et en position*, on décrira sur cette hypothénuse AB une circonférence, et le sommet de l'angle droit devra se trouver sur cette courbe (154); faisant ensuite au point A l'angle CAB égal à l'angle donné A, et joignant CB, on aura une solution du problème. Mais, comme l'angle donné ne doit pas avoir son sommet en A plutôt qu'en B, on prendra sur la demi-circonférence ACB l'arc $BC'=AC$; et, en joignant C'A et C'B, on aura une seconde solution. Enfin on en aura encore deux autres en prenant sur la demi-circonférence inférieure les arcs AC'' et BC''' égaux à l'arc AC, et joignant les points C'' et C''' avec les extrémités de AB. Fig. 96.

Ainsi ce problème admet quatre solutions, mais il faut remarquer que les quatre triangles ainsi construits sont égaux (204).

PROBLÈME.

213. *Construire un triangle dont on connaît les trois côtés a, b et c.*

Tracez une droite quelconque BC égale à l'un des côtés donnés, *a* par exemple; du point C comme centre, et avec le second côté *b* pour rayon, décrivez un arc; du point B comme centre, et avec un rayon égal au troisième côté *c*, décrivez un autre arc, qui coupera le premier en A; joignez AB et AC, et le triangle ABC résoudra le problème. Fig. 97.

214. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux arcs que l'on a décrits puissent se couper, et, pour cela, que le côté *a* soit plus petit que la somme des deux autres *b* et *c*, et plus grand que leur différence (172); et, comme le côté des extrémités duquel les deux circonférences ont été décrites est quelconque, on en conclut que, *pour que l'on puisse construire un triangle avec trois droites données, il faut et il suffit que l'une d'elles soit moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence*, conditions que l'on peut évidemment

comprendre dans celle-ci : *Le plus grand côté doit être moindre que la somme des deux autres.*

PROBLÈME.

215. *Etant donnés deux côtés a et b d'un triangle, et l'angle A opposé au premier, construire le triangle.*

Fig. 98, 99, 100 et 101. A l'extrémité A d'une droite $AC = b$, faites un angle égal à l'angle donné A; puis, du point C comme centre, et avec un rayon égal à a, décrivez un arc qui coupera le côté AB de cet angle en B, et joignez BC : le triangle ABC résoudra évidemment le problème. Examinons maintenant cette solution. Il peut se présenter trois cas, selon que l'angle A est obtus, droit ou aigu.

Fig. 98. *Premier cas.* Si l'angle A est obtus, le côté a qui lui est opposé doit être plus grand que b (195), et ainsi le problème sera impossible si cette condition n'est pas remplie. Et en effet, si du point C on abaisse une perpendiculaire sur AB, elle tombera nécessairement sur son prolongement, sans quoi on aurait dans un triangle un angle droit et un angle obtus, ce qui est absurde (186), puisque d'ailleurs elle ne peut couper AB en A : donc, pour que la circonférence puisse couper AB, il faut et il suffit que son rayon a soit plus grand que $AC = b$.

Fig. 99. *Second cas.* Si l'angle A est droit, il faut encore que a soit plus grand que b (195). Si cette condition est remplie, la circonférence coupera AB et son prolongement, et les deux triangles ABC, AB'C, satisferont à la question. Mais ces deux solutions n'en font qu'une : car on voit, en pliant la figure le long de AC, que ces deux triangles se recouvrent exactement. Un triangle rectangle est donc *déterminé* quand on connaît son hypothénuse et l'un de ses côtés. Donc

THÉORÈME.

216. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypothénuse égale et un côté égal.*

On peut démontrer cette proposition directement de la manière suivante.

Fig. 102. Soient l'hypothénuse $BC = B'C'$, et le côté $AC = A'C'$. Je porte le triangle A'B'C' sur ABC, en posant les points A'

et C' sur leurs homologues A et C, de sorte que A'C' coïncidera avec A C : alors A'B' tombera sur A B (48), et le point B' se trouvera quelque part sur A B. De cette manière nous aurons du même côté de la perpendiculaire C A, et à partir du même point C, deux obliques égales C B et C'B' sur A B : donc elles devront coïncider; donc les triangles A B C et A'B'C' se recouvrent parfaitement; donc ils sont égaux.

217. *Troisième cas.* Si l'angle A est aigu, et que le côté *a* soit plus grand que *b*, la circonférence enveloppera le point A, et par conséquent coupera A B et son prolongement : donc le problème sera possible, et n'admettra qu'une solution. Il en sera de même si $a = b$: car alors A sera un point d'intersection. Dans ces deux cas l'angle B sera *aigu*, puisqu'il sera ou plus petit que A (194) ou égal à A (196). Fig. 100.

Si $a < b$, la circonférence ne coupera la droite indéfinie A B qu'autant que *a* ne sera pas moindre que la perpendiculaire C I abaissée du point C sur cette droite (64). Si $a = \text{CI}$, la circonférence sera tangente à A B au point I (114). Le triangle A I C résoudra alors le problème, et l'angle B sera *droit.* Enfin si $a > \text{CI}$, la circonférence coupera A B aux deux points B et B' : car A lui est extérieur. Alors les deux triangles A B C, A B'C, satisferont également à la question. Ainsi le problème admettra deux solutions; et ce qui les différencie, c'est que dans l'un de ces deux triangles l'angle opposé au côté *b* est aigu, et que dans l'autre il est obtus : en outre ces deux angles sont supplémentaires; car dans le triangle C B B' l'angle B B'C est égal à B (196), et de plus il est supplémentaire de A B'C. Fig. 101.

218. Il suit immédiatement de ce que nous venons de dire à l'instant, que dans l'hypothèse où, l'angle A étant aigu, le côté *a* est plus petit que *b*, le triangle serait déterminé si l'on savait *à priori* de quelle espèce doit être l'angle opposé au côté *b*; et, comme il n'y a deux solutions que dans cette seule hypothèse, on peut dire que

THÉORÈME.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, ainsi que l'angle opposé au premier, pourvu toutefois que l'angle opposé au second côté soit de même espèce dans les deux triangles.

On fait si rarement usage de ce théorème, qui comprend, comme cas particulier, celui du n.° 216, que nous nous dispenserons d'en donner une démonstration directe.

219. Les théorèmes qui établissent les conditions d'égalité de deux triangles sont d'une grande importance théorique: car dans la démonstration d'une proposition on a sans cesse à prouver l'égalité de deux droites ou de deux angles, et nous avons vu que ces théorèmes fournissent des moyens d'y parvenir (209). Les quatre problèmes que nous venons de résoudre ne sont pas moins utiles dans la pratique : car les artistes ont sans cesse à fixer, dans le dessin d'une machine ou d'un ouvrage, la position d'un point par rapport à deux autres qui sont connus; de sorte que ce point sera déterminé si le triangle formé, en le joignant aux deux autres, est lui-même aussi déterminé.

DU QUADRILATÈRE.

220. Parmi les quadrilatères on distingue *le trapèze*, *le parallélogramme*, *la losange*, *le rectangle et le carré*.

221. On appelle *trapèze* un quadrilatère ABCD, dont deux côtés seulement sont parallèles.

Fig. 103. Les côtés parallèles AB et DC se nomment *les bases* du trapèze, et la perpendiculaire DE abaissée d'un point de l'une des bases sur l'autre, en est *la hauteur*.

222. *Le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles*. Telle est la figure 104.

THÉORÈME.

223. *Les côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* AD, *d'un parallélogramme* ABCD *sont égaux*.

Fig. 104. Tirons la diagonale AC, et nous formerons les deux triangles égaux ABC et ACD. En effet le côté AC leur est commun; l'angle CAB est égal à ACD : car ils sont alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD et à la sécante AC; de même l'angle ACB est égal à CAD, son alterne-interne, par rapport aux parallèles CB et AD et à la même sécante : donc les deux triangles ABC et ACD ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (201); donc leurs

parties homologues sont égales (202) : ainsi le côté CB opposé à l'angle CAB, est égal au côté AD, opposé à l'angle ACD ; de même le côté AB est égal à son homologue CD ; donc enfin les côtés opposés de deux parallélogrammes sont égaux.

224. COROLLAIRE. *Les parties de deux parallèles comprises entre deux autres parallèles sont égales.*

225. SCHOLIE. *Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux* : car leurs côtés sont parallèles et dirigés en sens contraires.

THÉORÈME.

226. **Réciproquement**, *si dans un quadrilatère* ABCD *les côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* AD, *sont égaux, la figure sera un parallélogramme.*

Si nous tirons la diagonale AC, les deux triangles ABC et ACD, que nous formerons ainsi, auront leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et seront par conséquent égaux (207). Donc leurs angles homologues seront égaux (208) : ainsi l'angle CAB, opposé au côté BC, sera égal à l'angle ACD, opposé au côté AD. Mais ces angles sont alternes-internes par rapport aux droites AB et CD et à la sécante AC : donc ces droites sont parallèles (87). Par une raison semblable AD est parallèle à CB ; donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (222).

227. Ce théorème a donné l'idée d'un instrument très-commode pour tracer des parallèles. Il est composé de deux grandes règles AB et CD assemblées avec deux autres plus petites MN Fig. 105.
et OP, par des tourillons en cuivre qui les traversent d'outre en outre. Cet assemblage est tel que les côtés opposés du quadrilatère formé par les centres M, N, O, P, des tourillons sont égaux, de sorte que ce quadrilatère est toujours un parallélogramme, et qu'ainsi les deux règles AB et CD ne cessent pas d'être parallèles, quelle que soit la quantité dont on les écarte. Alors, si, par un point Q, on veut mener une parallèle à une droite TS, on appliquera l'une des arêtes de la règle AB sur TS, et l'on amènera ensuite l'une des arêtes de l'autre règle CD à passer par le point Q ; il ne s'agira plus alors que de faire glisser une pointe à tracer le long de cette arête pour avoir la parallèle demandée QR.

THÉORÈME.

Fig. 104. 228. *Si deux côtés* AB *et* CD *d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, la figure sera un parallélogramme.*

Tirons encore la diagonale AC, et les deux triangles ABC et ACD, que nous formerons, auront un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : car le côté AC est commun; AB = CD; et, puisque ces deux côtés sont de plus parallèles, les angles CAB et ACD sont égaux comme alternes-internes : donc les triangles ABC et ACD sont égaux; donc leurs angles homologues ACB et CAD sont égaux; donc les droites CB et AD sont parallèles (87); donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (222).

THÉORÈME.

229. *Les diagonales d'un parallèlogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Si l'on compare, en effet, les deux triangles AOB et COD, on voit que le côté AB est égal à CD (223), que l'angle OAB = OCD, et que l'angle OBA = ODC (86, 1.°) : donc les deux triangles AOB et COD sont égaux (201); donc leurs côtés homologues AO et OC, OB et OD, sont égaux; donc les deux diagonales AC et BD se coupent mutuellement en parties égales.

230. Scholie. Si l'on mène par le point de section O des deux diagonales une sécante quelconque, les parties OI et OK comprises entre le point O et le périmètre du parallélogramme seront égales : car les triangles DOI et KOB sont égaux (201). Cette propriété dont jouit le point O l'a fait nommer le *centre* de figure du parallélogramme. En général *on appelle* CENTRE *d'une ligne ou d'une surface un point tel que toute sécante menée par ce point rencontre la ligne ou la surface en des points qui en sont deux à deux équidistans.*

PROBLÈME.

231. *Construire un parallélogramme, connaissant deux côtés* a, b, *et l'angle compris* A.

A l'extrémité d'une droite AB égale à *a*, je fais un angle DAB = A, et je prends sur son second côté une longueur AD = *b*. Puis des points B et D comme centres, et avec les rayons respectifs *b* et *a*, je décris deux arcs qui se coupent en C; je joins CB et

CD, et ABCD est le parallélogramme demandé. En effet ce quadrilatère est un parallélogramme (226) : car il est clair que ses côtés opposés sont égaux; de plus l'angle A et les côtés qui le comprennent ont été faits égaux à l'angle et aux deux côtés donnés.

232. On voit que le problème n'admet qu'une seule solution, et qu'ainsi un parallélogramme est déterminé par deux côtés et l'angle compris. D'où l'on conclut :

THÉORÈME.

Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Il serait d'ailleurs facile de démontrer ce théorème en superposant les deux figures.

233. Dans un parallélogramme et dans un triangle on donne le nom de *base* à l'un quelconque des côtés, et l'on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaissée sur la base d'un point quelconque du côté opposé du parallélogramme ou du sommet de l'angle opposé du triangle, sommet que l'on nomme le *sommet* du triangle. AB est la base du parallélogramme ABCD, et EF est sa hauteur. AB, CO et C sont respectivement la base, la hauteur et le sommet du triangle ABC. Fig. 106. Fig. 107.

THÉORÈME.

234. *Deux parallélogrammes* AC et AF *de même base* AB *et de même hauteur* FE *sont équivalens.* Fig. 106.

Puisque les deux parallélogrammes AC et AF ont la même base inférieure AB et la même hauteur FE, leurs bases supérieures DC et GF doivent se trouver sur une même ligne droite GDFC (84).

Cela posé, les triangles GAD et FBC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : car GA=FB comme côtés opposés d'un même parallélogramme AF (223); par la même raison, AD=BC; de plus l'angle GAD est égal à FBC, puisque ces angles ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens : donc le triangle GAD est égal au triangle FBC. Mais si l'on retranche le premier du trapèze ABCG, il reste le parallélogramme AC; et si l'on retranche le second triangle FBC du même trapèze, il reste le parallélogramme AF. Donc ces deux parallélogrammes sont équivalens : car il est évident

que si l'on retranche deux surfaces égales d'une même figure, les figures restantes auront des surfaces égales, et seront par conséquent équivalentes (185).

THÉORÈME.

235. *Un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.*

Fig. 107. Soit le triangle ABC. Je mène par les sommets des angles B et C des parallèles BD et CD aux côtés opposés, et je forme ainsi le parallélogramme ABCD (222), lequel a évidemment la même base AB et la même hauteur CO que le triangle ABC. Or il est clair que les deux triangles ABC et BCD ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun : car AC = BD, AB = CD (223), et CB est commun. Donc ils sont égaux (207) : donc le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD, qui a même base et même hauteur que lui.

236. COROLLAIRE. *Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalens :* car ils sont ainsi les moitiés de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur, c'est-à-dire de deux parallélogrammes équivalens.

237. Si les deux côtés contigus d'un parallélogramme quelcon-
Fig. 108. que ABCD sont égaux, les deux autres sont aussi égaux entre eux et à ces deux-là (223), et la figure prend alors le nom de *losange*. Ainsi *la* LOSANGE *est un quadrilatère dont les côtés sont égaux*.

238. Il suit du n.° 226 que *la losange est un parallélogramme*, et qu'en conséquence ses diagonales doivent se couper mutuellement en deux parties égales (229). Mais il y a plus, elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre : car les deux triangles AOB, BOC, sont équilatéraux entre eux, et ainsi l'angle AOB est égal à son homologue BOC.

On pourrait dire encore que les sommets opposés A et C étant chacun équidistans des deux autres B et D, la diagonale qui les unit est perpendiculaire sur le milieu de celle qui joint ces deux derniers (71), et réciproquement.

239. Puisqu'un parallélogramme est déterminé lorsque l'on donne deux de ses côtés et l'angle compris, on voit qu'*une losange le sera par la connaissance d'un angle et d'un côté*. On la construira d'ailleurs par la méthode du n.° 231.

Fig. 109. 240. Si l'un quelconque des angles d'un parallélogramme est

droit, son adjacent le sera aussi (86, 4.o); et, comme ces deux angles sont égaux à leurs opposés (88), le parallélogramme aura ses quatre angles droits, et en conséquence on lui donnera le nom de *rectangle*. Ainsi LE RECTANGLE *est un quadrilatère dont les angles sont droits.*

241. *Les diagonales d'un rectangle se coupent mutuellement en deux parties égales* (229); *et de plus elles sont égales :* car les triangles ABC et ABD, par exemple, ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc leurs hypothénuses AC et BD sont égales.

242. *Un rectangle est déterminé quand on connaît ses deux côtés contigus*, que l'on nomme *sa base* et *sa hauteur* (233).

243. Si deux côtés contigus d'un rectangle ABCD sont égaux, les deux autres le seront aussi, et la figure se nommera alors un *carré*. *Le* CARRÉ *est* donc *un quadrilatère dont les côtés sont égaux et les angles droits.* Ses diagonales se coupent en deux parties égales (229), à angles droits (238), et elles sont égales (241). Fig. 110.

244. *Un carré est déterminé par la connaissance de son côté*, et on le construit par le procédé du n.o 231.

245. Une des applications les plus intéressantes des propriétés du parallélogramme est celle qu'on en a faite dans la construction des machines à vapeur. On sait que dans ces machines la vapeur est introduite dans un cylindre où se meut un piston auquel sa pression imprime un mouvement rectiligne de *va et vient*. Pour transformer ce mouvement en un autre qui soit circulaire et continu, on attache la tige C du piston à l'une des extrémités d'un balancier AB, mobile autour de son milieu O. L'autre extrémité porte une *bielle* BF qui fait tourner une manivelle FK fixée à l'axe du volant. Fig. 111.

Le balancier, en oscillant autour de son centre, décrit l'arc A'AA"; de sorte que si la tige du piston était fixée à son extrémité A, elle serait constamment forcée de s'incliner vers le point O, ce qui entraînerait les inconvéniens les plus graves, tels qu'un frottement plus considérable dans le corps de pompe, la détérioration du piston, et la fuite de la vapeur. Pour les éviter, on a imaginé d'adapter au balancier, comme intermédiaire

entre son extrémité A et celle C de la tige du piston, un parallélogramme AGIC, dont les côtés sont unis à articulation; de sorte que, quand le balancier est horizontal, le côté AC se trouve dans le prolongement de la verticale CD. Mais on sent que, quand le balancier changera de position, la tige sera encore tirée comme auparavant vers le centre O, à moins que l'on ne contraigne le sommet I à se mouvoir de telle manière que le point C reste toujours sur la verticale que la tige du piston tend à décrire. Or rien n'est plus facile que de tracer la courbe que le point I devra suivre. En effet, soit OG'A' une position quelconque du balancier: du point O comme centre je décris les arcs AA' et GG', et je coupe la verticale AD en C' par un arc décrit du centre A', avec un rayon égal à AC. Les trois points G', A' et C' sont évidemment les positions actuelles des sommets G, A et C. Décrivant donc des points C' et G' comme centres, et avec des rayons respectivement égaux à AG et à GI, deux arcs, leur intersection I' sera le quatrième sommet du parallélogramme. En répétant cette construction, on pourra déterminer autant de points que l'on voudra de la courbe décrite par le point I, et par conséquent tracer cette courbe, en unissant tous ces points par un trait continu.

On conçoit alors que si l'on fixe au point I une petite roue dont la circonférence s'appuie sur un montant vertical PQ, auquel on aurait donné la forme de la courbe dont il s'agit, le point C se mouvra constamment, ainsi qu'on le désirait, dans la verticale AD.

On a remarqué que la courbe II', décrite par le point I, différait extrêmement peu, si ce n'est vers son extrémité, d'une circonférence dont le centre O' serait sur le prolongement de IC. En conséquence, les constructeurs de machines à vapeur substituent au montant PQ une barre O'I mobile autour de O', de sorte que, par suite de sa rigidité, le point I se trouve assujetti à décrire la circonférence O'I, et ainsi à se mouvoir à fort peu près sur la courbe II'. Pour déterminer le centre O', il suffira de déterminer une seule position I' du point I, et d'élever ensuite une perpendiculaire sur le milieu de la droite II'.

Remarquons toutefois que la circonférence O'I s'écartant assez sensiblement de la partie supérieure II'' de la courbe, la barre O'I ne remplirait qu'imparfaitement son objet si l'on n'avait pas le soin de limiter convenablement l'étendue de la course du piston.

246. Nous avons vu que l'on pouvait faire passer une circonférence par trois points qui ne sont pas en ligne droite, et par-conséquent par les sommets d'un triangle ABC, mais que l'on n'en pouvait faire passer qu'une (99) : donc un quatrième point O pris au hasard sur le plan de ce triangle ne se trouvera point sur la circonférence dont il s'agit ; par conséquent un quadrilatère quelconque n'est pas inscriptible au cercle ; à plus forte raison en est-il de même pour un polygone d'un plus grand nombre de côtés. Quelles sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un quadrilatère soit inscriptible ? Fig. 112.

THÉORÈME.

247. *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD *la somme des angles opposés est égale à deux droits ; et réciproquement, si deux angles opposés* A et C *sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible au cercle.*

1.° En effet, dans le quadrilatère inscrit ABCD la somme des deux angles opposés A et C a pour mesure la demi-somme des arcs DCB et DAB, c'est-à-dire la moitié de la circonférence : donc cette somme vaut deux droits.

2.° Soit ABCD un quadrilatère dans lequel les deux angles opposés A et C sont supplémentaires. Nous pourrons toujours faire passer une circonférence par les trois sommets B, A, D, et je dis qu'elle passera aussi par le quatrième C. En effet, les angles A et C étant supplémentaires, leur somme doit avoir pour mesure la moitié de la circonférence. Mais l'angle inscrit A a pour mesure la moitié de l'arc DMB : donc l'angle C doit avoir pour mesure la moitié de l'arc *concave* restant DAB compris entre ses côtés (aucun des angles A et C n'est rentrant (182), puisque leur somme vaut deux droits) ; donc son sommet est situé sur la circonférence BADMB (152) ; donc le quadrilatère est inscriptible.

248. Corollaire I. *Le rectangle et le carré sont inscriptibles.* Cela résulte d'ailleurs des n.os 241 et 243, ou encore du n.° 154.

249. Corollaire II. *Le parallélogramme et la losange ne sont pas inscriptibles :* car alors la somme de leurs angles opposés serait égale à deux droits ; donc ces angles seraient droits, puisque, d'ailleurs, ils sont égaux (225 et 238) ; donc, au lieu

d'un parallélogramme ou d'une losange, on aurait un rectangle ou un carré.

250. Corollaire iii. Si un trapèze est inscrit dans un cercle, et il y en a qui jouissent de cette propriété, le diamètre abaissé perpendiculairement sur l'un des côtés parallèles le divisera en deux parties *symétriques* par rapport à ce diamètre, c'est-à-dire en deux parties qui se recouvriront si l'on plie la figure le long de ce diamètre, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

Réciproquement, *un trapèze dont les deux côtés non parallèles sont égaux, est inscriptible, et partant symétrique.*
Fig. 113. Si l'on mène en effet CF parallèle à DA, le triangle CFB sera isocèle (223): donc l'angle CBF sera égal à CFB (196), et par conséquent à son correspondant A. Mais celui-ci est le supplément de l'angle D (86, 4.°): donc l'angle B est aussi le supplément de l'angle D; donc le trapèze est inscriptible (247).

251. Lorsqu'une maison doit avoir des *mansardes*, les fermes de la charpente ont la figure d'un trapèze symétrique surmonté d'un triangle isocèle dont la base est la base supérieure même de ce trapèze. En conséquence le charpentier élève une perpen-
Fig. 114. diculaire indéfinie CC' sur le milieu d'une droite AB égale à la longueur que doit avoir la base inférieure du trapèze, longueur qui est déterminée par la distance des deux murs parallèles sur lesquels le toit doit s'appuyer. Il prend sur cette perpendiculaire deux distances, l'une CG égale à AC, et l'autre DG égale aux $\frac{2}{3}$ de AC. Il mène ensuite par le point G une parallèle à AB, sur laquelle il porte deux longueurs FG et GI égales aux $\frac{2}{3}$ de AC, et en joignant DF et FA, DI et IB, il a la figure de sa ferme. On trouve, par la méthode du n.° 139, que les angles DFG et FAC valent respectivement 30° 53' et 69° environ : ainsi la pente du toit FD convient très-bien à nos climats [193 (*a*)], et celle du toit FA permet d'y appuyer des mansardes.

THÉORÈME.

Fig. 115. 252. *Dans tout quadrilatère* ABCD *circonscrit au cercle, la somme de deux côtés opposés* AB *et* CD *est égale à celle des deux autres* BC *et* AD; *et* réciproquement, *tout quadrilatère (qui n'a pas d'angle rentrant) est circonscriptible lorsque la somme de deux côtés opposés est égale à celle des deux autres.*

1.° Soient F, G, I, K, les points de contact des côtés du qua-

drilatère avec la circonférence : les deux parties de AB sont respectivement égales à AK et à BG (159) ; les deux parties de CD sont respectivement égales à DK et à CG ; donc la somme des deux côtés opposés AB et CD est égale à celle des quatre parties AK, KD, BG et GC, c'est-à-dire à la somme des deux autres côtés AD et BC.

2.° Soit ABCD un quadrilatère tel que $AB + CD = AD + BC$. Ce quadrilatère est ou n'est pas un parallélogramme : dans le premier cas la somme de deux de ses angles adjacens vaut deux droits ; dans le second, deux de ses côtés se rencontrent, et alors la somme des angles qu'ils forment avec un des deux autres côtés est moindre que deux droits (186). Soient donc A et D deux angles dont la somme ne surpasse pas deux droits. Décrivons une circonférence qui soit tangente aux trois droites DC, AD et AB (162) ; soit F son point de contact avec AB, et O son centre. J'abaisse de ce centre, OG perpendiculaire sur BC, et je dis que $OG = OF$. S'il n'en est pas ainsi, nous pourrons prendre une distance $OL = OF$; et en menant PQ, parallèle à BC, le quadrilatère APQD sera circonscrit à la circonférence IKF, puisque ses quatre côtés sont équidistans du centre O. Nous aurons donc (1.°) :

$$AD + PQ = AP + DQ.$$

Supposons que OL soit plus grand que OG : alors PQ sera égal à BC si la somme des angles A et D vaut deux droits (87 et 224) ; et si cette somme est moindre que deux droits, PQ sera plus petit que BC : car il est évident que toute droite menée dans un triangle parallèlement à l'un de ses côtés est moindre que ce côté ; donc on aura :

$$AD + PQ = \text{ou} < AD + BC.$$

Mais nous venons de voir que

$$AD + PQ = AP + DQ ;$$

d'une autre part nous avons supposé

$$AD + BC = AB + DC ;$$

donc nous aurons :

$$AP + DQ = \text{ou} < AB + DC,$$

ce qui est évidemment absurde. Donc OG n'est pas plus petit que OF. On prouverait de même qu'il n'est pas plus grand : donc $OG = OF$; donc la circonférence IKF est tangente aux quatre côtés du quadrilatère.

253. COROLLAIRE. La losange et le carré sont circonscriptibles au cercle; mais le parallélogramme et le rectangle ne le sont pas.

254. SCHOLIE. Il suit des n.os 247 et 252 que la losange et le rectangle ne sont pas en même temps inscriptibles et circonscriptibles au cercle, mais que le carré jouit de cette propriété. Le trapèze en jouit aussi, pourvu que ses deux côtés non parallèles soient égaux (250), et que chacun d'eux soit la demi-somme des deux bases (252).

255. On peut se demander s'il y a des quadrilatères autres que le carré et *certains* trapèzes qui soient à la fois inscriptibles et circonscriptibles au cercle. Pour répondre à cette
Fig. 116. question, j'inscris un quadrilatère quelconque ABCD dans un cercle; puis, ayant divisé deux de ses angles adjacens A et B chacun en deux parties égales par les droites AI et BI, j'abaisse de leur point de section I les perpendiculaires IP et IK sur les côtés respectifs AB et CD. La première IP mesurera la distance du point I aux trois côtés AB, AD et BC (162) : donc si l'on prend IQ = IP, et que par le point Q on mène C'D' parallèle à CD, le quadrilatère ABC'D' sera circonscrit à la circonférence décrite du point I comme centre avec le rayon IP. Je dis qu'il est aussi inscriptible (247): car l'angle C', par exemple, étant égal à son correspondant C, est par conséquent le supplément de son opposé A.

DES POLYGONES EN GÉNÉRAL.

THÉORÈME.

256. *La somme des angles intérieurs de tout polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.*

Fig. 85. 1.° Soit ABCDEF un polygone convexe quelconque. Si du sommet de l'angle A on mène des diagonales aux sommets de tous les angles non adjacens à celui-ci, on partagera le polygone ABCDEF en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux : car les deux triangles extrêmes ABC et AFE comprennent chacun deux côtés du polygone, tandis que les triangles intermédiaires n'en contiennent qu'un seul. Or la somme des angles de chaque triangle vaut deux droits : donc la somme des angles de

tous les triangles vaut autant de fois deux droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone. Mais la somme des angles de tous les triangles est évidemment égale à celle des angles du polygone : donc enfin la somme des angles d'un polygone convexe quelconque est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.

2.° Soit un polygone concave ABCDEFGIK. Joignons AI, GE, EC, et nous formerons ainsi le polygone *convexe* ABCEGIA, dont la somme des angles sera égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux. Or il est clair qu'en partant de ce polygone, on reproduira le proposé si l'on substitue aux droites AI, GE, EC, les brisées AKI, GFE, EDC. Examinons donc de combien variera la somme de ses angles par chacune de ces substitutions, et commençons par la première : or, en remplaçant le côté AI par la brisée AKI, nous diminuerons la somme des angles du polygone ABCEGIA des deux angles KAI et KIA, puisque nous substituons les angles BAK et GIK aux angles BAI et GIA; mais nous l'augmenterons aussi de l'angle rentrant K, c'est-à-dire de quatre droits moins AKI : donc la somme des angles du polygone est augmentée de quatre droits et diminuée des trois angles KAI, KIA, AKI, c'est-à-dire diminuée de deux droits (186); donc elle est augmentée de deux droits; donc la somme des angles du nouveau polygone ABCEGIKA surpasse celle des angles du polygone primitif ABCEGIA de deux droits; mais il a aussi un côté de plus : donc la somme des angles du polygone ABCEGIKA est encore égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux; et, comme on pourra répéter pour les autres angles rentrans F et D le même raisonnement que nous venons de faire pour l'angle K, le théorème est ainsi démontré. Fig. 117.

Il pourrait arriver que les trois points A, I, G, fussent en ligne droite. Alors, en substituant la brisée AKI à la droite AI, on augmenterait le nombre des côtés du polygone de deux unités; mais aussi la somme de ses angles augmenterait de quatre droits. En effet, en remplaçant la droite AI par la brisée AKI, on diminue la somme des angles du polygone ABCEGA de l'angle KAI, mais on l'augmente des nouveaux angles K et GIK; or ce dernier, étant extérieur au triangle AKI, vaut la somme des deux intérieurs opposés KAI et AKI (188) : donc la somme des angles du polygone augmente de K + KAI + AKI, et diminue Fig. 118.

de KAI; donc elle augmente de K + AKI, c'est-à-dire de quatre droits.

Fig. 119. Enfin il pourrait encore se faire que la droite AI, prolongée, traversât le polygone, de sorte que le polygone ABCEGIA serait lui-même concave, comme on le voit dans la figure. Alors on joindrait AG, et l'on partirait du polygone convexe ABCEGA; puis, en substituant d'abord la brisée AIG à la droite AG, et ensuite AKI à AI, on reviendrait au polygone primitif.

257. Scholie. Le théorème que nous venons de démontrer peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

La somme des angles intérieurs de tout polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés, moins quatre droits : car, en répétant deux droits autant de fois qu'il y a de côtés moins deux, il s'en faut évidemment de deux fois deux droits ou de quatre droits que l'on obtienne autant de fois deux droits qu'il y a de côtés. Au reste, on serait conduit *directement* à cet énoncé pour un polygone *convexe* en le décomposant en triangles par des diagonales parties d'un point pris dans l'intérieur de ce polygone.

258. Ce théorème fournit à l'arpenteur le moyen de s'assurer s'il a bien opéré, lorsqu'il a relevé tous les angles d'un polygone : car leur somme doit être égale à autant de fois 180° que le polygone a de côtés moins deux.

THÉORÈME.

259. *Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone convexe*
Fig. 120. *quelconque* ABCDE *dans le même sens*, c'est-à-dire dans le sens même où nous avons ainsi nommé ses côtés, *la somme de tous les angles extérieurs* (188) B'BC, C'CD, D'DE, etc., *est égale à quatre droits.*

En effet chaque angle intérieur, tel que ABC, réuni à son extérieur adjacent B'BC, vaut deux droits : donc la somme de tous les angles tant intérieurs qu'extérieurs du polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés; si donc on en retranche la somme des angles intérieurs, qui vaut autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins quatre droits (257), il restera évidemment quatre droits pour la somme des angles extérieurs.

THÉORÈME.

260. *Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone concave quelconque* ABCDEF, *la différence entre la somme des angles extérieurs des angles saillans et celle des angles extérieurs des angles rentrans est égale à quatre droits.* Fig. 121.

En effet chaque angle saillant, tel que ABC, *augmenté* de son extérieur B'BC, vaut deux droits; et chaque angle rentrant, tel que C, *diminué* de son extérieur C'CD, vaut aussi deux droits: donc, si à la somme de tous les angles intérieurs du polygone on ajoute la somme des angles extérieurs des angles saillans, et que l'on en retranche la somme des angles extérieurs des angles rentrans, on trouvera autant de fois deux droits qu'il y a de côtés. Par conséquent, si l'on retranche de cette quantité la somme de tous les angles intérieurs, c'est-à-dire autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins quatre droits, le reste, *quatre droits*, exprimera l'excès de la somme des angles extérieurs des angles saillans sur celle des angles extérieurs des angles rentrans, et c'est précisément là ce qu'on voulait démontrer (*a*).

261. SCHOLIE. Ainsi la diversité infinie que le caprice peut mettre dans la forme des polygones n'empêche pas que leurs angles intérieurs ou extérieurs ne soient assujettis à une relation constante.

THÉORÈME.

262. *Deux polygones quelconques sont égaux lorsque tous leurs côtés, à l'exception d'un seul, sont égaux chacun à chacun, et que les angles compris entre les côtés égaux sont aussi égaux chacun à chacun.*

Supposons, en effet, que dans les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', on ait AB=A'B', BC=B'C', CD=C'D', DE=D'E', Fig. 122.

(*a*) Remarquons encore que, si l'on convient de regarder comme *négatifs* les angles extérieurs des angles rentrans, et les autres comme *positifs*, ce qui est conforme au principe de l'application de l'algèbre à la géométrie cité dans la note (*b*) du n.° 147: car ces angles sont dans des positions directement contraires par rapport à l'angle du polygone, on pourra comprendre les deux théorèmes des n.os 259 et 260 dans un même énoncé, en disant que,

Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone quelconque dans le même sens, la somme ALGÉBRIQUE *de ses angles extérieurs sera égale à quatre droits.*

et que les angles B, C, D, soient respectivement égaux aux angles B', C', D'. Je porte le second polygone sur le premier, en posant les points A' et B' sur leurs homologues A et B : de cette manière le côté A'B' coïncidera avec AB; et, comme l'angle B'=B, le côté B'C' prendra la direction BC. Mais B'C'=BC : donc le point C' tombera sur C. Or l'angle C'=C : ainsi le côté C'D' prendra la direction CD; et, comme C'D'=CD, le point D' tombera sur D. On verra de même que E' tombera sur E, et qu'en conséquence les deux côtés A'E' et AE coïncideront, puisque leurs extrémités seront confondues. Donc les deux polygones sont égaux.

THÉORÈME.

263. *Deux polygones sont égaux lorsqu'ils ont tous leurs angles, à l'exception d'un seul, égaux chacun à chacun, et que les côtés adjacens aux angles égaux sont aussi égaux chacun à chacun.*

Ce théorème se démontrerait comme le précédent en superposant les deux polygones.

264. Corollaire. Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (232).

265. Il y a plusieurs autres cas d'égalité de deux polygones; mais, comme ils sont peu importans, nous ne nous arrêterons pas à les énumérer. Nous observerons seulement que si, dans la suite, on a besoin de prouver l'égalité de deux polygones qui ne satisferaient pas aux conditions énoncées aux n.os 262 et 263, on devra les superposer, et, s'ils coïncident parfaitement, en conclure qu'ils sont effectivement égaux.

266. Scholie. Il suit des deux théorèmes précédens qu'un polygone est déterminé quand on connaît, 1.o tous ses côtés à l'exception d'un seul, ainsi que les angles compris entre chacun de ces côtés et le suivant; 2.o tous ses angles moins un, ainsi que tous les côtés qui leur sont respectivement adjacens. Observons d'ailleurs que lorsqu'on a tous les angles, moins un, d'un polygone, celui-ci est connu (256).

On voit que le nombre des données nécessaires dans ces deux cas à la détermination d'un polygone de n côtés est $n-1+n-2=2n-3$. Mais il faut dire encore entre quels

côtés les angles donnés sont compris, ou à quels angles les côtés donnés sont adjacens. Ainsi un pentagone ne serait pas déterminé par la connaissance seule des quatre côtés a, b, c, d, et des angles β, γ, δ; mais si l'on ajoute que β est compris entre a et b, γ entre b et c, et δ entre c et d, on pourra construire le polygone. Pour cela, à l'extrémité B d'une droite $AB = a$, on fera un angle $ABC = \beta$, on prendra $BC = b$; puis au point C on fera un angle $BCD = \gamma$, on prendra $CD = c$; ensuite on fera au point D un angle $CDE = \delta$, et l'on prendra $DE = d$; joignant enfin EA, le polygone sera construit (262). Fig. 120.

267. Les artistes ont souvent à exécuter des figures égales à d'autres. Ainsi dans les arts de construction, par exemple, on doit sans cesse donner à un morceau de bois, de pierre ou de fer un relief qui s'ajuste dans la cavité d'une autre pièce; or les deux pièces qui doivent ainsi emboîter l'une dans l'autre doivent avoir exactement la même forme. La méthode par laquelle nous avons construit le polygone ABCDE peut évidemment servir à résoudre ce problème, c'est-à-dire à décrire un polygone égal à un autre; mais elle présente un inconvénient assez grave, en ce que la moindre erreur commise sur un angle influant sur la direction des côtés de tous les autres angles suivans, la longueur du côté qui doit fermer le polygone pourra être très-sensiblement altérée. Le procédé qui suit, d'ailleurs plus simple, est à l'abri de cet inconvénient. Fig. 120.

Par le sommet A du polygone donné ABCDEFGI tirez une droite quelconque AA′ d'une grandeur arbitraire, et par tous les autres sommets menez-lui des parallèles indéfinies sur lesquelles vous prendrez des longueurs BB′, CC′, ... toutes égales à AA′; et joignez enfin A′B′, B′C′, C′D′...... Il est clair que le polygone A′B′C′D′E′F′G′I′ est égal à ABCDEFGI : car leurs côtés et leurs angles homologues sont égaux chacun à chacun (228, 223 et 88). Fig. 123.

Ce procédé, connu des charpentiers de vaisseaux sous le nom de *tricage*, peut être employé avec succès pour exécuter les *cherches* ou *patrons* des courbes qui doivent terminer une pierre ou une pièce de bois. En effet, soit ABCDE la courbe dont il s'agit. On marquera sur cette ligne un assez grand nombre de points très-rapprochés, là surtout où la courbure sera la plus forte, et par tous ces points on mènera une suite de Fig. 124.

lignes parallèles. Cela fait, au moyen d'une règle flexible on prolongera toutes ces parallèles sur une planche très-mince posée sur l'*épure*, et l'on prendra sur ces parallèles les distances AA′, BB′, CC′,..... toutes égales entre elles; unissant ensuite les points A′, B′, C′,.... par un trait continu, on aura une courbe A′B′C′.... qui sera très-sensiblement égale à la courbe ABCDE : car on conçoit que si elle glissait parallèlement à elle-même, quand le point A′ serait arrivé en A, les autres points B′, C′, D′,... se trouveraient sur leurs correspondans B, C, D.... Il n'y aura plus alors qu'à couper la planche suivant le contour A′B′C′D′E′, et l'on aura ainsi un patron qui, porté sur une pierre ou sur une pièce de bois, servira à y tracer une courbe égale à ABCDE.

Les artistes emploient encore pour copier une figure une autre méthode qui devient très-expéditive lorsque l'on n'a pas besoin d'une exactitude mathématique : c'est *la méthode des carreaux*.

On recouvre d'abord la figure que l'on veut copier d'un cadre divisé en carrés égaux par des fils de soie bien tendus, ou, si l'on ne possède pas un pareil instrument, on commence par tracer un angle droit qui comprenne la figure entre ses côtés, et l'on porte sur chacun d'eux un nombre assez grand de petites parties égales, pour qu'en menant par tous les points de division de chaque ligne des parallèles à l'autre, le rectangle déterminé par les deux parallèles extrêmes renferme la figure. On numérote
Fig. 125. ensuite toutes ces parallèles comme on le voit dans la figure 125. Cela fait, on construit sur la feuille de papier qui doit recevoir la copie un rectangle égal au précédent, et divisé, comme lui, en carrés que l'on numérote de la même manière. Veut-on maintenant fixer sur la copie la position d'un point quelconque A de l'original, je remarque qu'il se trouve dans le carré II, III, 6, 7; je prends avec le compas sa distance à la verticale II, et je porte cette distance sur l'horizontale 77 du second cadre à partir de cette verticale; puis, ayant mesuré de même la distance du point A à l'horizontale 77, je la porte perpendiculairement à l'horizontale 77 de la copie, de M en A′, ce qui peut se faire à vue d'œil, et j'ai ainsi la position du point homologue à A. Je déterminerai de même la position de tous les autres sommets du polygone, et en joignant chacun avec le suivant, la copie sera exécutée.

Si la figure renferme des lignes courbes, on rapportera sur

la copie les points où chacune d'elles coupe les côtés des différens carreaux qu'elle traverse, ce qui donnera un certain nombre de points de chaque courbe, de sorte qu'il ne s'agira plus que de joindre ces points par un trait continu.

Telle est la méthode que l'on emploie pour copier les cartes de géographie, les plans topographiques, et même les tableaux lorsqu'on veut en avoir une copie fidèle. Seulement on n'y fait usage du compas que pour tracer les rectangles et leurs divisions, et l'on marque *à peu près* dans chaque carré de la copie les points homologues de ceux de l'original : d'où l'on voit que les erreurs seront d'autant moindres que les carrés sont plus petits. Aussi, quand les détails d'un carré sont très-multipliés, on le subdivise lui-même en parties plus petites, de sorte que l'on parvient ainsi à atténuer les erreurs autant qu'on le veut. On sent qu'en s'exerçant à cette méthode de dessin, et en employant des carrés de plus en plus grands, on acquerra bientôt une grande exactitude de coup d'œil. Aussi cette méthode a-t-elle été recommandée par les grands peintres.

PROBLÈME.

268. *Transformer un polygone donné* ABCDF *en un triangle.* Fig. 105.

Il est clair que si nous savions transformer un polygone donné en un autre qui eût un côté de moins, nous pourrions regarder le problème proposé comme résolu. Or si nous joignons CF, le polygone ABCF aura un côté de moins que ABCDF; mais aussi il sera plus petit que lui du triangle CDF. Il s'agit donc d'ajouter au polygone ABCF une surface égale à celle de ce triangle, sans cependant augmenter le nombre de ses côtés; or on y parviendra en construisant sur CF un triangle équivalant à CDF, dont le sommet soit sur AF. Il suffira pour cela de mener par le point D une parallèle DG à CF, et de joindre CG : car il est évident que le triangle CGF aura ainsi même base et même hauteur que DCF, et lui sera par conséquent équivalent (236). Le polygone proposé ABCDF sera donc transformé en un polygone ABCG ayant un côté de moins. Pour transformer actuellement ce quadrilatère en un triangle, on joindra semblablement BG; par le point C on mènera la parallèle CI à BG, on tirera la droite BI, et le triangle ABI résoudra le problème.

Remarquons que notre triangle a un côté AB et un angle A communs avec le polygone donné.

Remarquons encore que notre construction convient aussi bien à un polygone concave qu'à un polygone convexe. L'hexagone ABCDEF a été transformé successivement en un pentagone ABCDG, en un quadrilatère ICDG, et enfin en un triangle ICK.

Fig. 127.

PROBLÈME.

269. *Transformer un triangle* ABC *en un autre qui ait pour sommet un point donné* O, *et dont la base soit dirigée suivant* BC *à partir de* B *ou de* C.

Il peut se présenter deux cas, selon que le point O se trouve ou ne se trouve pas sur l'un des côtés AB et AC.

Fig. 128. *Premier cas.* Supposons le point O sur le côté AB. Si nous joignons OC, nous formerons un triangle BOC, dont le sommet sera en O, et qui aura BC pour base. Mais il est trop petit de AOC. Pour l'augmenter de cette quantité, sans cependant changer le nombre de ses côtés, nous mènerons par le point A une parallèle AF à OC, et nous joindrons OF (268). Il est facile de voir que le triangle BOF résoudra le problème.

Fig. 129. *Deuxième cas.* Supposons que le point O ne soit ni sur l'un ni sur l'autre des deux côtés AB et AC. Nous ramènerons ce second cas au premier en transformant le triangle ABC en un autre qui ait même base et même hauteur que lui, et dont un des côtés soit dirigé suivant BO; il suffira pour cela de mener par le point A une parallèle à BC, et de joindre le point A', où elle coupe BO, avec le point C. Le triangle BOF résout le problème.

270. Les deux problèmes que nous venons de résoudre fournissent le moyen d'additionner ou de soustraire deux polygones, et de multiplier ou de diviser un polygone par un nombre quelconque. Et d'abord il est clair qu'il suffit de savoir exécuter ces opérations sur des triangles, pour pouvoir les effectuer sur des polygones quelconques, puisque l'on pourra toujours commencer par transformer ces polygones en triangles.

Examinons donc le cas des triangles.

PROBLÈME.

271. *Additionner deux triangles* ABC, DEF.

1.º Si ces deux triangles ont des hauteurs égales, prenez sur le prolongement de la base BC de l'un d'eux une quantité CG égale à la base EF du second, et joignez AG : il est clair que le triangle ACG sera équivalent à DEF (236), et qu'ainsi le triangle ABG résoudra le problème. Fig. 130.

2.º *Si les* deux triangles n'ont pas la même hauteur, on commencera par les y réduire. Pour cela on élèvera sur EF une perpendiculaire EI égale à la hauteur AH de ABC; par le point I on mènera IO parallèle à EF jusqu'à la rencontre de ED, et l'on transformera ensuite le triangle DEF en un autre EOK qui ait son sommet au point O, et sa base dirigée suivant EF. Fig. 131.

PROBLÈME.

272. *Soustraire un triangle* DEF *d'un autre* ABC.

1.º Si les deux triangles ont des hauteurs égales, on prendra sur BC une partie CG' = EF, et en joignant AG', on formera le triangle ABG', qui résoudra le problème. Fig. 130.

2.º Si les deux triangles n'ont pas la même hauteur, on commencera par les y réduire.

PROBLÈME.

273. *Par un point* O *donné sur le périmètre d'un polygone* ABCDEF, *mener une droite qui en retranche une partie équivalente à un polygone donné* LMNQ. Fig. 132.

On transformera d'abord le polygone LMNQ en un triangle équivalent LQR (268), puis celui-ci en un autre LST, dont la hauteur soit égale à la perpendiculaire abaissée du point donné O sur le côté adjacent AB (271, 2.º). Cela fait, on prendra sur ce côté AB une quantité AG = LT, et l'on joindra OG. Si le point G ne se trouve pas au delà de B, le problème est résolu, puisque le triangle OAG est équivalent à LST, et partant au polygone donné LMNQ. S'il n'en est pas ainsi, on joindra OB; et, comme il ne s'agira plus que de retrancher du polygone OBCDEF une portion équivalente au triangle OBG, on construira sur OB un triangle équivalent à OBG, et dont le sommet soit sur la droite indéfinie BC. Pour cela on mènera GH parallèle à OB, et l'on joindra OH. Si le point H ne se trouve pas au delà de C, le problème est résolu : car le quadrilatère OABH est équivalent au triangle OAG. Si le point H est situé au delà

de C, les mêmes considérations conduiront à joindre OC, à mener HI parallèle à OC, et à tirer OI. Si le point I ne tombe pas au delà de D, le problème est résolu : car le triangle OCI étant équivalent à OCH, le pentagone OABCI est équivalent au quadrilatère OABH, et partant au triangle OAG. Si, comme dans la figure, le point I est situé au delà de D, on tirera OD, on mènera par le point I la parallèle IK à OD, et l'on joindra OK. Le point K se trouvant entre D et E, la droite OK résout le problème.

Remarquons que le problème *pourrait* être impossible *si le* polygone proposé était concave.

PROBLÈME.

274. *Construire un triangle qui soit n fois plus grand*
Fig. 153. *qu'un triangle donné* ABC.

On portera la base BC (n—1) fois à la suite d'elle-même, de C en D, et l'on joindra AD. Le triangle ABD résoudra le problème : car on voit bien que si l'on joignait tous les points de division de CD avec le sommet A, le triangle ABD se trouverait partagé en n triangles tous équivalens à ABC (236).

PROBLÈME.

275. *Partager un triangle* ABD *en un certain nombre de parties équivalentes par des droites qui partent toutes d'un même point donné.*

Il peut se présenter trois cas, selon que le point donné est un des sommets du triangle, qu'il se trouve sur un des côtés, ou dans son intérieur.

Premier cas. Si les lignes de division doivent partir du sommet A, on partagera la base en autant de parties égales que l'on en veut dans le triangle, et l'on joindra les points de division avec le sommet A.

Deuxième cas. Supposons que l'on veuille partager le triangle
Fig. 154. en quatre parties équivalentes par des droites issues du point O. On commencera par partager le côté BD, sur lequel se trouve le point O, en quatre parties égales, et l'on joindra les points de division C, F, G avec le sommet opposé A, ce qui partagera le triangle en quatre parties équivalentes ; de sorte qu'il ne s'agira plus que de mener par le point O des droites OC', OF' et OG',

qui retranchent du triangle proposé des parties OBC', OBAF' et OBAG', respectivement équivalentes au quart ABC, aux deux quarts *ABF*, et aux trois quarts ABG de ce triangle (273) : car alors chacune des parties OBC', OC'AF', OF'G' et OG'D sera nécessairement le quart de ABD.

Troisième cas. Supposons qu'il s'agisse de partager encore le triangle ABD en quatre parties équivalentes, mais que les lignes de division doivent partir d'un point O intérieur au triangle. Nous transformerons d'abord ABD en un triangle BOC ayant pour sommet le point O (269), et nous diviserons celui-ci en quatre parties équivalentes par les droites OE, OF, OG. Le point E étant compris entre B et D, le triangle BOE est une des parties demandées : ainsi il ne s'agit plus que de mener par le point O les droites OH et OK, qui retranchent du triangle ABD des parties OBDH, OBDAK respectivement égales à la moitié OBF et aux trois quarts OBG de ce triangle.

Remarquons que la solution générale de ce problème exige que l'on sache partager une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales. C'est une question que nous résoudrons bientôt (282), indépendamment du problème dont il s'agit.

PROBLÈME.

276. *Partager un polygone en un certain nombre de parties équivalentes, par des droites qui partent toutes d'un point donné dans l'intérieur de ce polygone.*

Supposons que l'on veuille partager le polygone ABCDE en quatre parties équivalentes. On transformera d'abord ce polygone en un triangle AOF, qui ait son sommet au point donné O (268 et 269), et en opérant ensuite comme dans le problème précédent, on trouvera que les parties demandées sont AOG, OGBL, OLCDI et OIEA. Fig. 156.

Si le point d'où les lignes de division doivent partir est un des sommets du polygone, la construction sera plus simple : car on transformera immédiatement le polygone en un triangle qui ait son sommet en ce point (268).

Ce problème et celui du n.° 273 sont d'une grande importance dans la question du partage des propriétés : car on sent que les copartageans peuvent avoir un intérêt à ce que les lignes de division partent toutes d'un même point. C'est ce qui arri-

verait, par exemple, si le point O était un puits, ou bien si, dans la question du n.o 273, une des personnes entre lesquelles on doit partager le terrain ABCDEF avait déja une propriété qui s'étendît depuis A jusqu'en O.

Nous reviendrons plus tard sur cet important problème de la division des terrains.

CHAPITRE II.

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

THÉORÈME.

Fig. 187. 277. *Toute parallèle* DF *à l'un des côtés* BC *d'un triangle* ABC *divise les deux autres en parties proportionnelles entre elles et à ces deux autres côtés*, c'est-à-dire que l'on aura la suite de rapports égaux

$$AD : AF :: BD : CF :: AB : AC.$$

En effet, portons BD sur AD autant de fois que la chose sera possible : nous trouverons qu'elle y est contenue *deux* fois, avec le reste ID, de sorte que

$$AD = 2BD + ID.$$

Mais si, par les points de division G et I, nous menons des parallèles à BC, nous déterminerons sur le côté AC des parties AK et KO égales à FC : car, si l'on tire KM et FN parallèles à AB, ces droites seront égales respectivement à GI et à BD (224), et partant à AG ; de plus les angles A, K, F, seront égaux comme correspondans, et les angles G, M, N, comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens : donc les triangles AGK, KMO, FNC, sont égaux (201) ; donc leurs côtés homologues AK, KO et FC, sont égaux (202). Ainsi

$$AF = 2FC + OF.$$

On voit donc que la droite AF contient FC autant de fois que AD contient BD, et que le reste OF (*a*) correspond au reste ID. Par conséquent, si l'on porte à son tour ID sur DB, et que, par les

(*a*) OF est plus petite que FC, sans quoi ID serait ou égale à BD, ou plus grande que cette droite.

points de division on mène des parallèles à BC, on verra de même que FC contiendra OF autant de fois que BD contiendra ID, que la partie restante RC de la première correspondra à la partie restante BQ de la seconde, et ainsi de suite, si l'on continue d'effectuer sur les droites AD et BD et sur AF et FC les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières lignes et celle des deux autres. Les deux séries de quotiens que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes: donc le rapport des deux droites AD et BD est le même que celui de AF à FC (37); donc on a la proportion

AD : BD :: AF : FC.

Mais si l'on applique à cette proportion le principe du n.° 218 de l'arithmétique, on en tirera:

AB : AC :: AD : AF :: BD : FC,

ce qu'il fallait démontrer.

278. Corollaire. *Si l'on coupe deux droites quelconques* AB et A'B' *par une suite de parallèles*, AA', CC', DD', etc., *les parties de l'une seront proportionnelles aux parties correspondantes de l'autre.* Fig. 158.

Cette proposition est une conséquence immédiate du n.° 224, si les droites AB et A'B' sont parallèles. Supposons donc qu'elles ne le soient pas, et alors prolongeons-les jusqu'à leur point O de rencontre. Le triangle OCC', dans lequel AA' est parallèle au côté CC', nous donnera la proportion

AC : A'C' :: OC : OC'.

Le triangle ODD', dans lequel CC' est parallèle au côté DD', nous donnera pareillement:

OC : OC' :: CD : C'D' :: OD : OD'.

Nous tirerons de même du triangle OFF':

OD : OD' :: DF : D'F' :: OF : OF'.

Enfin le triangle OBB' nous donnera:

OF : OF' :: FB : F'B'.

Toutes ces suites de rapports égaux sont liées chacune à la suivante par un rapport commun: donc tous ces rapports sont égaux; donc

AC : A'C' :: CD : C'D' :: DF : D'F' :: FB : F'B'.

THÉORÈME.

279. Réciproquement *toute droite qui divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles est parallèle au troisième.*

Supposons que l'on ait :

Fig. 139. AB : AD :: AC : AF.

Je dis que DF est parallèle à BC : car si cela n'a pas lieu, nous pourrons mener par le point D une parallèle DI à BC, et nous aurons ainsi

AB : AD :: AC : AI.

Cette proportion et la précédente ayant trois termes correspondans égaux, on en conclut que le quatrième terme AF de l'une est égal au quatrième terme AI de l'autre, ce qui est absurde. Donc on ne pouvait pas supposer que DF ne fût point parallèle à BC ; donc ces deux lignes sont parallèles.

Cette démonstration est, comme on voit, une nouvelle application du principe du n.º 59.

280. Corollaire. Donc *si l'on coupe en parties proportionnelles les droites* AB, AC, AD, AE, AF, *menées d'un même point* A *aux différens points de la droite* XY, *tous les points de division* B', C', D', E', F' *seront en ligne droite.* Fig. 140.

PROBLÈME.

Fig. 141. 281. *Partager une droite donnée* AB *en parties proportionnelles à des droites données* p, q, r.

Menons par le point A une droite indéfinie AX, et prenons sur cette droite des parties AP, PQ, QR, respectivement égales aux lignes données p, q, r. Il est clair maintenant que si nous joignons RB, et que par les points P et Q nous menions des parallèles à RB, ces droites diviseront AB proportionnellement aux lignes AP, PQ, QR (278), et par conséquent aux lignes données p, q, r. Mais, au lieu de mener ces parallèles par l'un des procédés connus (93 et 130), nous emploierons le suivant, qui est susceptible d'un plus grand degré d'exactitude. Joignez RB, et coupez cette droite en R' par un arc décrit du point A comme centre, avec le rayon AR. Reportez ensuite les longueurs AP et AQ sur AR', et joignez PP', QQ'. Ces droites seront pa-

rallèles à RR' (279) : car les points P et P', Q et Q', divisent respectivement AR et AR' en parties proportionnelles.

282. Corollaire. Il suit de là que si les lignes p, q, r, eussent été égales, la droite AB eût été partagée en parties égales. Ainsi, pour partager une droite donnée AB en cinq parties égales, par *exemple*, on mènera par l'une de ses extrémités A une droite indéfinie quelconque AX, sur laquelle on portera une ouverture quelconque de compas autant de fois que l'on voudra avoir de parties dans AB. On joindra le dernier point de division avec le point B, et il ne s'agira plus que de mener par les autres points de division des parallèles à la ligne de jonction, ce qui s'exécutera par la méthode que nous venons d'indiquer. Nous observerons seulement de faire l'angle BAX peu différent de la moitié d'un droit, et de prendre l'ouverture de compas à peu près double des parties demandées de AB, parce qu'avec ces précautions les parallèles ne couperont pas AB trop obliquement, et les points qui doivent déterminer leur direction ne seront pas trop rapprochés. Fig. 142.

283. Le procédé que nous venons d'indiquer pour diviser une longueur donnée en parties égales est l'un des plus parfaits que l'on puisse employer dans le dessin linéaire, mais il ne saurait suffire dans la pratique des arts de précision. Les artistes ont alors recours à une machine qui leur fournit des résultats d'une exactitude presque indéfinie.

La machine à diviser se compose de deux parties principales : *un burin* AB, *et une vis* CD, exécutée avec un soin extrême, de sorte que tous ses pas sont parfaitement égaux. Cette vis ne peut que tourner sur son axe sans avancer ni reculer, tandis que l'écrou GI, dans lequel elle est engagée, peut glisser dans une coulisse parallèle à cet axe. La pièce à diviser se fixe sur l'écrou par des vis de pression. Quant au burin, il est assujetti à se mouvoir dans un plan fixe perpendiculaire à l'axe de la vis. Fig. 143.

Il résulte de cette disposition que, pour chaque tour qu'on fera faire à la vis, l'écrou avancera d'une quantité égale à son pas ; de sorte que si à la fin de chaque tour on fait jouer le burin, on aura marqué sur la pièce à diviser des longueurs égales aux pas successifs de la vis, et par conséquent égales entre elles. Mais pour lui faire parcourir des espaces plus pe-

tits, on adapte à sa tête une plaque circulaire divisée en un grand nombre de parties égales, en 400, par exemple; et alors si, rapportant sa marche à un *index* immobile KL, on la fait tourner de 1, 2, 3..... grades, l'écrou avancera de $\frac{1}{400}$, $\frac{2}{400}$, $\frac{3}{400}$..... de la longueur du pas.

D'après cela, si l'on veut diviser une droite donnée en parties égales, après avoir amené le *zéro* de la tête de la vis sous l'index, on placera l'une des extrémités de la droite sous le burin, et l'on fera tourner la vis jusqu'à ce que l'autre extrémité soit venue aussi s'y placer, en ayant soin de compter le nombre des tours et la fraction de tour que la plaque circulaire aura exécutés. Supposons, pour fixer les idées, que la ligne doive être partagée en 87 parties égales, que la vis ait fait dix tours, et que le n.° 78 soit sous l'index. La tête de la vis aura ainsi parcouru 4078 grades, dont la 87.e partie est $46^{G}\frac{76}{87}$. En conséquence on fera tourner la vis par intervalles de 47^{G} et de 46^{G}, de manière que les erreurs commises *en plus et en moins* se compensent, et l'on donnera à chaque fois un coup de burin. Ainsi, en faisant tourner la vis 76 fois de 47^{G}, et 11 fois de 46, elle aura parcouru précisément les 4078 grades. Remarquons que si les 86 premiers intervalles eussent été chacun de 47^{G}, le 87.e aurait valu $4078-4042=36^{G}$. Ainsi l'erreur n'aurait pas été sur cette division de 11^{G}, c'est-à-dire des $\frac{11}{400}$ de la longueur du pas de la vis, quantité inappréciable : car ce pas est toujours très-petit, et même on est parvenu à construire des vis dont le pas régulier n'a qu'*un millimètre*.

Remarquons que lorsque l'on connaîtra la longueur du pas de la vis, et elle est facile à déterminer en examinant combien il faut faire parcourir de grades à la plaque circulaire pour que l'écrou avance d'un nombre donné de millimètres, on pourra mesurer une longueur donnée à moins de $\frac{1}{400}$ du pas près.

PROBLÈME.

284. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites*
Fig. 144. *données a, b, c,* c'est-à-dire trouver une droite x, qui forme le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient les lignes a, b, c, de sorte que l'on ait :

$$a : b :: c : x.$$

a étant plus grand que c, on pourra regarder les deux termes

a et b du premier rapport comme deux côtés d'un triangle, et les deux termes c et x du second comme deux de leurs parties correspondantes déterminées par une parallèle au troisième côté de ce triangle. En conséquence on tracera deux droites indéfinies OY et OZ sous un angle quelconque, mais que, pour plus d'exactitude dans les constructions, on ne fera pas plus grand qu'un droit. On prendra sur ses côtés des parties $OA=a$, et $OB=b$, puis sur le côté OA une seconde partie $OC=c$. Menant CX parallèle à AB, on obtiendra la quatrième proportionnelle demandée OX.

On pourra encore regarder les antécédens a et c comme les deux parties d'un même côté, et alors les conséquens b et x seront les parties correspondantes de l'autre côté: ce qui conduira à la construction exécutée dans la figure 145, où BX est la ligne demandée. Fig. 145.

285. COROLLAIRE. Si les deux lignes a et b étaient égales, la ligne inconnue x serait déterminée par la proportion

$$a : b :: b : x,$$

et alors on l'appellerait *une troisième proportionnelle* aux droites a et b. On obtiendra évidemment cette troisième proportionnelle par la construction précédente.

THÉORÈME.

286. *Deux triangles équiangles entre eux ont leurs côtés homologues proportionnels.* (Les côtés homologues sont ceux qui sont opposés à des angles égaux.)

Supposons les trois angles A, B, C, respectivement égaux aux angles A', B', C' : je dis que les deux triangles ABC et A'B'C' auront leurs côtés homologues proportionnels. Fig. 146.

En effet, puisque l'angle $A=A'$, si l'on prend sur les côtés AB et AC des parties AD et AF respectivement égales à A'B' et à A'C', et qu'on joigne DF, on formera un triangle ADF égal à A'B'C' (199): donc leurs parties homologues sont égales; ainsi le côté $DF=B'C'$, et l'angle $ADF=B'$; par conséquent cet angle ADF est aussi égal à B; donc la droite DF est parallèle à BC (86, 3.°); donc on a la proportion (277)

$$AB : AD :: AC : AF.$$

Or, si l'on mène FG parallèle à AB, cette droite coupera les

deux côtés AC et BC en parties proportionnelles; et, comme BG = DF (224), on aura la proportion

AC : AF :: BC : DF;

Donc, à cause du rapport commun AC : AF, on aura :

AB : AD :: AC : AF :: BC : DF,

ou, en remplaçant les lignes AD, AF et DF par leurs égales A'B', A'C' et B'C' :

AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C',

ce qu'il fallait démontrer.

287. Scholie. Observez que dès que l'on aura reconnu que deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, on pourra en conclure que leurs côtés homologues sont proportionnels : car le troisième angle de l'un sera égal au troisième de l'autre (187).

THÉORÈME.

Fig. 140. 288. *Les droites* AC, AD, AE, *qui partent du sommet d'un triangle* ABF, *divisent sa base et sa parallèle* B'F' *en parties proportionnelles, et sont aussi coupées par cette parallèle en parties proportionnelles.*

En effet les triangles ABC et AB'C', ACD et AC'D', ADE et AD'E', AEF et AE'F', sont équiangles (86, 3.o) : donc leurs côtés homologues sont proportionnels (286); ainsi nous aurons entre ces côtés les quatre suites de rapports égaux

AB : A'B' :: BC : B'C' :: AC : A'C',
AC : A'C' :: CD : C'D' :: AD : A'D',
AD : A'D' :: DE : D'E' :: AE : A'E',
AE : A'E' :: EF : E'F' :: AF : A'F'.

Chaque suite étant ainsi liée avec celle qui vient après par un rapport commun, on doit en conclure que tous les rapports qui les composent sont égaux, et qu'ainsi

BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: EF : E'F',

et que

AB : A'B' :: AC : A'C' :: AD : A'D' :: AE : A'E' :: AF : A'F' :

ce qui prouve, 1.o que les droites BF et B'F' sont coupées en parties proportionnelles; 2.o que la droite B'F' coupe AB, AC, AD, AE et AF en parties proportionnelles.

289. Corollaire. Il suit de là que si BF était divisée en par-

ties égales aux points C, D, E, sa parallèle B'F' serait aussi divisée en parties égales aux points C', D', E'.

Cette remarque fournit un nouveau moyen de partager une droite donnée en un certain nombre de parties égales. Pour y parvenir, nous porterons sur une droite indéfinie BY autant de fois une même ouverture de compas que nous voulons de parties dans la droite donnée *a*; et sur BF nous construirons un triangle équilatéral BAF (213); nous prendrons AB' et AF' égaux à *a*, et nous joindrons B'F'. Cette droite sera parallèle à BF (279) : car elle divise AB et AF en parties proportionnelles; de plus elle sera égale à *a*: car les triangles ABF et AB'F', étant équiangles, ont leurs côtés homologues proportionnels (286). Mais le premier est équilatéral : donc le second l'est aussi; donc B'F' = *a*; donc si l'on joint AC, AD et AE, la droite *a* sera divisée en parties égales aux points C', D' et E'.

Remarquons que les droites issues de A seront d'autant mieux déterminées que ce point sera plus éloigné de XY, c'est-à-dire que l'ouverture de compas que l'on a portée sur XY sera plus grande.

Remarquons encore que cette méthode a l'inconvénient d'effectuer la division sur une droite égale à *a*, et non sur cette ligne même. On pourrait, il est vrai, modifier la construction de manière à diviser immédiatement la droite *a*, mais aussi on serait exposé à des erreurs plus grandes; cependant, si l'on devait partager plusieurs droites données en un même nombre de parties égales ou proportionnelles à d'autres droites données, c'est à la méthode du triangle équilatéral que l'on devrait avoir recours.

THÉORÈME.

290. *Si deux angles* BAC, B'A'C', *ont leurs côtés* AB *et* A'B', AC *et* A'C' *parallèles, proportionnels, et dirigés dans le même sens ou en sens contraires, les droites qui joindront les extrémités* B *et* B', C *et* C' *de leurs côtés homologues, iront concourir avec celle qui joint leurs sommets* A *et* A'. Fig. 147.

En effet, soient O le point de concours de BB' et de AA', et O' le point où cette dernière droite est coupée par CC' : puisque A'B' est parallèle à AB, les triangles OAB et OA'B' sont équiangles, et ainsi leurs côtés homologues sont proportionnels (286) : donc

AB : A'B' :: OA : OA'.

Les triangles O'AC et O'A'C' donneront pareillement

AC : A'C' :: O'A : O'A'.

Mais les deux premiers rapports de ces proportions sont égaux : car on a par hypothèse :

AB : A'B' :: AC : A'C';

donc leurs seconds rapports le sont aussi; donc on aura

OA : OA' :: O'A : O'A',

d'où l'on tire, *dividendo* ou *componendo* (Arith., n.° 218) :

OA—OA' : O'A—O'A' :: OA : O'A,

OA + OA' : O'A + O'A' :: OA : O'A.

Mais dans le cas où les côtés sont dirigés dans le même sens, OA—OA'=AA', et O'A—O'A'=AA'; dans l'autre cas OA + OA'=AA', O'A + O'A' =AA'; donc les deux proportions précédentes se réduisent à la suivante :

AA' : AA' :: OA : O'A;

d'où l'on conclut que OA=O'A : donc les deux droites BB' et CC' coupent AA' au même point.

291. Scholie. Remarquons que cette démonstration est indépendante de la grandeur des angles égaux BAC et B'A'C', et qu'elle s'appliquerait au cas où les brisées BAC et B'A'C' deviendraient deux droites parallèles.

D'où il suit que *les diagonales d'un trapèze vont se croiser sur la droite qui joint les milieux des côtés parallèles :*
Fig. 105. car les droites AI et MC, IB et DM, sont proportionnelles parallèles et de sens contraires.

Donc, *si une droite glisse sur le plan d'un triangle parallèlement à sa base, et que dans chacune de ses positions on joigne avec les extrémités de la base les points où elle coupe les deux autres côtés,* le lieu *des points de section de toutes les lignes de jonction sera la droite qui va du sommet du triangle au milieu de sa base.*

PROBLÈME.

Fig. 148. 292. *Par un point donné* A, *mener une droite qui aille concourir avec deux droites données* BC, DF, *que l'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de rencontre.*

Par le point A tirons une droite quelconque BD, et il est clair alors que si l'on prend sur une parallèle quelconque CF à BD un point K qui la divise en parties dont les distances aux points C et F soient proportionnelles à AB et à AD, la droite qui joindra les points K et A résoudra le problème. Si donc le point A se trouve entre les deux droites données, on prendra BI=AD, IC=BA, on tirera la droite CF parallèlement à BD, on joindra BF, et l'on mènera IK parallèle à cette droite. La droite CF sera divisée au point K en parties proportionnelles à CI et à IB, c'est-à-dire à BA et à AD : donc la droite AK résoudra le problème.

On verra facilement ce qu'il y aura à faire si le point A est extérieur à l'angle formé par les deux droites BC et DF. Si les deux droites étaient données sur le terrain, on mesurerait AB, AD et CF; puis on chercherait le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient respectivement les longueurs de BD, de AB et de CF, ce qui ferait connaître celle de CK, et déterminerait ainsi la position du point K.

Ce problème trouve souvent son application dans la géométrie pratique. Ainsi, par exemple, dans la *gnomonique*, comme toutes les *lignes horaires* vont concourir en un même point, que l'on nomme le *centre* du cadran solaire, on sent que l'on a souvent à mener d'un point donné une droite qui aille concourir avec deux autres.

THÉORÈME.

293. *Deux sécantes* OA *et* OB *qui partent d'un même point* O *pris hors d'une circonférence, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* OC *et* OD, c'est-à-dire que l'on a la proportion Fig. 149.

OA : OB :: OD : OC,

dans laquelle l'une des sécantes et sa partie extérieure forment les deux extrêmes ou les deux moyens.

Pour le démontrer, joignons AD et BC, et nous formerons deux triangles équiangles ADO et OBC : car l'angle O leur est commun, et les angles inscrits A et B s'appuient sur le même arc CD. Leurs côtés homologues sont donc proportionnels : ainsi

OA (opposé à l'angle D) : OB (son homologue, comme opposé à l'angle C, l'égal de D) :: OD (opposé à l'angle A) : OC

[son homologue, comme opposé à l'angle B, l'égal de A (*a*)] : ce que nous voulions démontrer.

294. Corollaire. Si l'on observe que la démonstration précédente est indépendante de la grandeur de la corde BD que la sécante OB laisse dans la circonférence, on en conclura que la proportion ci-dessus subsistera toujours si l'on fait tourner OB autour de O de manière qu'elle tende à sortir du cercle : donc elle aura encore lieu à la limite, c'est-à-dire quand la corde BD sera devenue nulle. Mais alors la sécante OB et sa partie extérieure OD seront devenues égales toutes deux à la tangente OT : donc on aura alors :

$$OA : OT :: OT : OC;$$

ce qui nous apprend que *lorsqu'une tangente et une sécante partent d'un même point, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

Ce théorème pourrait se démontrer *à priori* de la manière suivante :

Si nous joignons les points A et C avec le point de contact T, nous formerons les deux triangles équiangles AOT et COT : car ils ont l'angle commun O, et les angles OAT et CTO ont chacun pour mesure la moitié de l'arc CT (142 et 146) : donc leurs côtés homologues sont proportionnels ; ainsi [293, (*a*)]

$$OA : OT :: OT : OC.$$

295. Cette propriété de la tangente fournit le moyen de déterminer à quelle distance la vue peut s'étendre en pleine mer, lorsque l'on connaît la hauteur de l'œil au dessus de sa surface. En effet, soient O la position de l'œil, OD sa verticale, qui va, comme on sait, passer par le centre de la terre, et OT la tangente menée de O à la circonférence du grand cercle dans le plan duquel il se trouve. Il est clair que les seuls points de la demi-circonférence DTB que l'œil puisse apercevoir sont ceux de l'arc DT, de sorte que le point T est la limite de la vue. Mais l'arc DT diffère peu de OT : car les hauteurs des plus hautes montagnes elles-mêmes sont très-petites par rapport au rayon de la terre. Ainsi nous pourrons prendre OT pour la distance

---

(*a*) Toutes les fois que l'on établira une proportion entre les côtés de deux triangles, on ne devra *jamais* négliger de constater, ainsi que nous venons de le faire, que les deux termes de chaque rapport sont des côtés homologues.

du point T au pied de la verticale de O. Or, comme on connaît la hauteur DO de l'œil au dessus du niveau de la mer, que l'on sait d'ailleurs que le diamètre de la terre vaut 12732396 mètres, on pourra calculer la tangente OT : car, puisqu'elle est moyenne proportionnelle entre la sécante $OB = BD + DO$ et sa partie *extérieure* DO, on obtiendra sa valeur en multipliant $(BD + DO)$ par DO, et extrayant ensuite la racine carrée du produit.

Observons qu'à moins que l'observateur ne soit placé sur une montagne, son élévation au dessus du niveau de la mer sera extrêmement petite par rapport au diamètre de la terre : de sorte que l'on pourra alors négliger DO vis-à-vis de BD, et prendre ainsi la racine carrée de $BD \cdot DO$ pour la valeur de OT (*a*).

Proposons-nous, par exemple, de calculer à quelle distance s'étend la vue d'un matelot placé dans la hune d'un vaisseau supposée à 50^m au dessus du niveau de la mer : nous multiplierons le diamètre de la terre, 12732396^m, par 50, et, en extrayant la racine carrée du produit 636619800, nous trouverons que le matelot pourrait apercevoir un objet situé à 25231^m, ou à 6 lieues environ.

Si l'on voulait savoir à quelle distance ce même matelot serait d'un fanal élevé de 26^m, à l'instant où il commencerait à en recevoir la lumière, on observerait qu'il ne peut l'apercevoir qu'au moment où son œil arrivera en O' sur le prolongement de la tangente OT (on suppose que O représente le fanal). Par conséquent la distance O'O sera la somme des deux tangentes OT et O'T ; or $OT = \sqrt{12732396 \cdot 26} = 18194^m$; et, comme nous venons de trouver que $O'T = 25231^m$, on voit que $O'O = 43425^m$, ou 11 lieues environ : telle est donc à fort peu près la distance du navire au rivage.

THÉORÈME.

296. *Les parties de deux cordes* AC, BD, *qui se coupent,* Fig. 150.

(*a*) Si l'on représente en effet le diamètre de la terre par d, et la distance OD par h, on verra facilement que l'erreur commise en prenant $\sqrt{dh}$ pour valeur de OT ou de $\sqrt{(d+h)h}$, est moindre que $\sqrt{\frac{h^3}{4d}}$: elle sera donc moindre que $\frac{1}{2}$ si $\frac{h^3}{4d}$ est $< \frac{1}{4}$, ou si h est moindre que $\sqrt[3]{d}$, c'est-à-dire que 234 mètres. Si donc h satisfait à cette condition, l'erreur commise en prenant pour valeur de OT la racine de dh exacte à moins d'une demi-unité, ne sera pas d'une unité.

sont réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire que l'on a la proportion

OA : OB :: OD : OC,

dans laquelle les deux parties d'une corde forment les extrêmes ou les moyens.

En effet, si nous joignons AD et BC, nous formerons les deux triangles équiangles AOD et BOC : car les angles en O sont opposés par le sommet, et les angles inscrits A et B s'appuient sur le même arc DC; donc leurs côtés homologues sont proportionnels; ainsi

OA : OB :: OD : OC,

ce qui démontre notre proposition.

297. Corollaire. La démonstration précédente est indépendante de l'angle des deux cordes: ainsi la proposition sera encore vraie si la corde AC devient un diamètre, et que la corde BD lui soit perpendiculaire; mais alors DO sera égal à BO (102); donc on aura :

OA : OB :: OB : OC,

ce qui nous apprend que *la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de ce diamètre* (*a*).

298. Scholie. Si dans les proportions fournies par les théorèmes des n.os 293, 294 et 296, on égale le produit des moyens à celui des extrêmes, on verra que ces trois théorèmes sont compris dans le suivant :

THÉORÈME.

Si d'un point quelconque on mène arbitrairement une

(*a*) Ce théorème fournit une solution de ce problème d'algèbre : *Partager un nombre donné en deux parties dont le produit soit* MAXIMUM? On peut concevoir en effet que l'on ait décrit une circonférence dont la longueur du diamètre soit exprimée par ce nombre (52): alors, si d'un point quelconque de cette circonférence on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre, il suit du théorème en question que le produit des deux segmens de ce diamètre sera égal au carré de cette perpendiculaire; mais le maximum de cette droite est le rayon : donc le produit des deux segmens sera maximum quand la perpendiculaire ira tomber au centre : car c'est alors seulement qu'elle sera égale au rayon. Donc, *pour partager un nombre en deux parties dont le produit soit* MAXIMUM, *il faut le partager en deux parties égales.*

sécante à une circonférence, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection est constant.

299. Les théorèmes des n.os 293 et 296 fournissent chacun une nouvelle solution du problème du n.o 284. Veut-on s'appuyer sur la propriété des sécantes, on dira, en considérant la proportion

$$a : b :: c : x:$$ Fig. 151.

c étant plus grand que b, cette droite est une sécante, et b sa partie extérieure, tandis que a et la ligne inconnue x sont l'autre sécante et sa partie extérieure. En conséquence je prends sur une droite $OC = c$ une partie OB égale à b; je mène par le point O une droite quelconque $OA = a$; et la ligne OX, déterminée en faisant passer une circonférence par les trois points A, B, C, résoudra le problème.

Si l'on veut s'appuyer sur le théorème du n.o 296, on remarquera que les deux moyens b et c de la proportion

$$a : b :: c : x$$

sont les deux parties d'une corde, et les deux extrêmes a et x les deux parties de l'autre. On tirera donc deux droites qui se croisent en O; on prendra sur l'une $OB = b$ et $OC = c$, et $OA = a$ sur l'autre; puis on fera passer une circonférence par les trois points A, B, C, et OX sera la quatrième proportionnelle.

300. *On appelle projection d'une droite* AB *sur une autre* XY, *la portion* A'B' *de cette seconde comprise entre les perpendiculaires abaissées sur elle des deux extrémités de la première.* D'où l'on voit que dans un triangle rectangle chaque côté de l'angle droit est la projection de l'hypothénuse sur sa direction. Fig. 152.

THÉORÈME.

301. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC *on abaisse une perpendiculaire* AI *sur l'hypothénuse*, Fig. 153.

1.o *Cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront équiangles, et qui le seront par conséquent entre eux.*

2.o *Elle sera moyenne proportionnelle entre les deux segmens* BI *et* IC *de l'hypothénuse.*

3.o *Chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse et sa projection sur cette hypothénuse.*

4.° *Le carré de la longueur* (32) *de l'hypothénuse sera égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.* (Cette proposition est connue en géométrie sous le nom de *théorème de Pythagore*, du nom du philosophe qui l'a découverte.)

5.° *Les carrés des longueurs des trois côtés seront proportionnels aux longueurs des projections de ces côtés sur l'hypothénuse.*

En effet, 1.° les triangles ABI et ABC sont équiangles : car ils sont rectangles l'un en I, l'autre en A; l'angle B leur est commun : donc le troisième angle BAI du premier est égal au troisième angle C du second.

On démontrerait de la même manière que les triangles AIC et ABC sont équiangles, et que par conséquent les deux triangles AIB et AIC jouissent de la même propriété [on le ferait voir directement en observant que leurs angles aigus ont leurs côtés perpendiculaires (91)].

2.° Les triangles AIB et AIC étant équiangles, leurs côtés homologues BI et AI, AI et IC, sont proportionnels : ainsi on a la proportion

$$BI : AI :: AI : IC,$$

ce qui prouve que la perpendiculaire AI est moyenne proportionnelle entre les deux segmens BI et IC de l'hypothénuse.

3.° Puisque les triangles AIB et ABC sont équiangles, leurs côtés homologues BI et AB, AB et BC, sont proportionnels : on a donc la proportion

$$BI : AB :: AB : BC \ldots\ldots\ldots (1).$$

Les triangles AIC et ABC donnent de même, en comparant leurs côtés homologues,

$$IC : AC :: AC : BC \ldots\ldots\ldots (2).$$

Donc chaque côté AB ou AC de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse BC et sa projection BI ou IC sur cette hypothénuse.

4.° Si l'on suppose que l'on ait *mesuré* (29) les trois côtés de notre triangle, ainsi que les segmens BI et IC de l'hypothénuse, et que les proportions (1) et (2) aient été établies entre les longueurs trouvées, on pourra, dans chacune, égaler le produit des moyens à celui des extrêmes, ce qui donnera

$$\overline{AB}^2 = BI \cdot BC$$

et

$$\overline{AC}^2 = IC \cdot BC.$$

Si l'on additionne ces deux égalités membre à membre, et que dans l'addition des seconds membres on mette BC en facteur commun des quantités qu'elle multiplie, on trouvera :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (BI + IC) \cdot BC;$$

mais $BI + IC = BC$; donc on aura enfin :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

Ainsi le carré de la longueur de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

5.° Puisque nous venons de voir à l'instant que

$$\overline{AB}^2 = BI \cdot BC, \qquad \overline{AC}^2 = CI \cdot BC;$$

et comme d'ailleurs

$$\overline{BC}^2 = BC \cdot BC,$$

nous aurons évidemment la suite de rapports égaux

$$\overline{AB}^2 : BI \cdot BC :: \overline{AC}^2 : CI \cdot BC :: \overline{BC}^2 : BC \cdot BC;$$

car la raison de chaque rapport est l'unité.

Divisant maintenant tous les conséquens par BC, ce qui revient à multiplier chaque rapport par ce nombre, il viendra

$$\overline{AB}^2 : BI :: \overline{AC}^2 : CI :: \overline{BC}^2 : BC,$$

ce qui démontre que les carrés des longueurs des trois côtés sont proportionnels aux longueurs de leurs projections respectives BI, CI et BC, sur l'hypothénuse.

302. COROLLAIRE I. Il suit du principe 4.° que, *pour calculer l'hypothénuse d'un triangle rectangle, lorsque l'on connaît les longueurs des deux autres côtés, il faut additionner les carrés de ces longueurs, et extraire la racine carrée de leur somme.* Si, par exemple, les deux côtés de l'angle droit avaient respectivement 3 mètres et 4 mètres, on élèverait les deux nombres *abstraits* 3 et 4 au carré, ce qui donnerait 9 et 16, et l'on extrairait la racine carrée de leur somme, 25. Cette racine est 5 : donc l'hypothénuse a 5 mètres.

303. Il suit encore du même principe que, si du carré de l'hypothénuse (*a*) on retranche le carré d'un des côtés de l'angle

---

(*a*) Désormais, quand nous voudrons parler du carré de la longueur d'une droite, du produit ou du quotient des longueurs de deux droites, nous dirons, pour abréger, le carré de cette droite, le produit ou le quotient de ces droites.

droit, le reste sera le carré de l'autre côté : donc, *pour calculer un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, on retranchera du carré de l'hypothénuse le carré du côté connu, et l'on extraira la racine carrée du reste.* On trouvera ainsi que dans un triangle rectangle dont l'hypothénuse a 5^m et l'un des côtés 4^m, l'autre côté vaut

$$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3^m.$$

304. Corollaire II. Si d'un point quelconque A d'une circonférence on mène les deux cordes AB, AC, aux extrémités du diamètre BC, on formera un triangle rectangle ABC (144), auquel on pourra appliquer les principes 2.° et 3.° : on en conclura donc que,

1.° *La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de ce diamètre,* ce que nous avions déja démontré d'une autre manière (297);

2.° *Que toute corde menée par l'extrémité d'un diamètre est moyenne proportionnelle entre ce diamètre et sa projection sur lui.*

305. Corollaire III. *Si des extrémités d'un même dia-*
Fig. 154. *mètre on tire différentes cordes* AC, AD, BF....., *les carrés de ces cordes seront proportionnels à leurs projections sur le diamètre.* Il suit en effet du corollaire précédent que *le carré d'une corde est égal au produit de la projection de cette corde par le diamètre :* ainsi

$$\overline{AC}^2=AC'\cdot AB,\ldots\ \overline{AD}^2=AD'\cdot AB,\ldots\ \overline{BF}^2=BF'\cdot AB;$$

d'ailleurs $\overline{AB}^2=AB\cdot AB$: donc

$$\overline{AC}^2 : AC'\cdot AB :: \overline{AD}^2 : AD'\cdot AB :: \overline{BF}^2 : BF'\cdot AB :: \overline{AB}^2 : AB\cdot AB;$$

d'où, en divisant tous les conséquens par AB,

$$\overline{AC}^2 : AC' :: \overline{AD}^2 : AD' :: \overline{BF}^2 : BF' :: \overline{AB}^2 : AB,$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

Fig. 155. 306. *Dans tout triangle le carré d'un côté quelconque* AB *est égal à la somme des carrés des deux autres* AC *et* BC, *augmentée ou diminuée du double produit de l'un de ces deux côtés* BC, *par la projection* CI *de l'autre* AC *sur lui,*

selon que l'angle C *opposé au premier côté* AB *est obtus ou aigu.*

En effet, pour projeter le côté AC sur CB, nous abaisserons du point A une perpendiculaire AI sur CB; et cette perpendiculaire tombera à gauche ou à droite du point C, selon que l'angle C sera obtus ou aigu, sans quoi le triangle AIC aurait un angle obtus et un angle droit, ce qui est absurde. Cela posé, dans le triangle rectangle ABI nous avons (301,4.°):

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2.$$

Mais $BI = BC \pm CI$, suivant que l'angle C est obtus ou aigu; or on démontre dans tous les traités d'algèbre que le carré de la somme ou de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités, augmentée ou diminuée de leur double produit: donc

$$\overline{BI}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CI}^2 \pm 2BC \cdot CI.$$

Substituant cette valeur de $\overline{BI}^2$ dans celle de $\overline{AB}^2$, il viendra:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CI}^2 \pm 2BC \cdot CI.$$

Mais AI et CI sont les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle ACI: donc la somme de leurs carrés fait $\overline{AC}^2$; remplaçant donc, dans l'égalité précédente, $\overline{AI}^2 + \overline{CI}^2$ par $\overline{AC}^2$, on aura enfin:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2BC \cdot CI;$$

ce qui démontre le théorème énoncé : car le signe supérieur se rapporte, comme nous l'avons observé, au cas où l'angle C est obtus, et le signe inférieur à celui où il est aigu.

Remarquons que, dans la figure 156, BI est égal à $CI - BC$, et non pas à $BC - CI$; mais son carré n'en est pas moins $\overline{CI}^2 + \overline{BC}^2 - 2CI \cdot BC$. Fig. 156.

307. Corollaire. Le théorème précédent montre que le carré d'un côté quelconque d'un triangle est plus grand ou plus petit que la somme des carrés des deux autres, selon que l'angle opposé est obtus ou aigu. Il suit de là, et en appliquant le principe du n.° 122, que,

1.° *Si le carré du plus grand côté d'un triangle surpasse la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé sera obtus;*

2.° *Si le carré du plus grand côté d'un triangle est moindre*

que la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé sera aigu, et ainsi le triangle sera acutangle (194).

Exemple. Les trois côtés d'un triangle valent respectivement 5^m, 7^m et 8^m : de quelle espèce est ce triangle? Le carré de 5 est 25; celui de 7 est 49; leur somme 74 est plus grande que 64, qui est le carré du troisième côté : donc le triangle est acutangle.

3.° *Si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé sera droit, et le triangle sera rectangle.* Ainsi le triangle dont les trois côtés contiendraient respectivement 3, 4 et 5 fois l'unité linéaire, serait rectangle.

308. Cette propriété des nombres 3, 4, 5, fournit, pour élever une perpendiculaire à l'extrémité A d'une droite AB, un moyen que l'on emploie fréquemment dans la géométrie pratique. Pour cela on porte une longueur arbitraire cinq fois sur AB; puis des points 3 et A pris successivement pour centres, et avec les rayons respectifs A5 et A4, on décrit deux arcs qui se coupent en C; joignant CA, cette droite résout le problème, puisque les trois côtés du triangle AC3 valent respectivement 3, 4 et 5 fois une même longueur.

Fig. 157.

Pour appliquer commodément cette méthode au tracé des perpendiculaires sur le terrain, on réunit deux à deux par des nœuds trois cordons tels que les parties PQ, QR et RP comprises entre chaque nœud et le suivant contiennent respectivement trois, quatre et cinq fois une même longueur arbitraire, un mètre, par exemple. Alors, pour élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite tracée sur le terrain, on tendra le côté 3 sur cette droite, en plaçant à son extrémité le nœud intermédiaire entre les côtés 3 et 4, et en tirant fortement l'autre nœud, il ira se placer sur la perpendiculaire demandée.

THÉORÈME.

Fig. 155. 309. *Si l'on joint le sommet d'un angle* A *d'un triangle* ABC *avec le milieu du côté opposé* BC, *la somme des carrés des deux côtés de cet angle sera égale au double du carré de la droite* AD *de division, augmenté du double du carré de la moitié du troisième côté* BC.

Abaissons en effet du sommet A la perpendiculaire AI sur la

base BC, ce qui déterminera les projections BI et IC des deux autres côtés AB et AC sur cette base. Alors, d'après le théorème du n.° 306, les triangles BDA et CDA nous donneront respectivement :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2BD \cdot DI,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2CD \cdot DI.$$

Mais CD = BD : ainsi, en ajoutant ces deux égalités membre à membre, nous aurons :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2,$$

ce qui démontre notre théorème.

THÉORÈME.

310. *La somme des carrés des quatre côtés d'un quadrilatère quelconque* ABCD *est égale à la somme des carrés de ses diagonales augmentée du carré du double de la droite* IK *qui joint leurs milieux.* Fig. 158.

Joignons, en effet, le milieu I de l'une de ces diagonales avec les deux sommets opposés B et C. Les deux triangles ABD et ACD donneront respectivement :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{BI}^2 + 2\overline{AI}^2,$$
$$\overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{CI}^2 + 2\overline{AI}^2 :$$

donc, en additionnant ces deux égalités membre à membre, il viendra :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BI}^2 + 2\overline{CI}^2 + 4\overline{AI}^2 \ldots (1).$$

Or, dans le triangle BIC, la droite IK va du sommet I au milieu du côté opposé BC ; nous aurons donc :

$$\overline{BI}^2 + \overline{IC}^2 = 2\overline{IK}^2 + 2\overline{BK}^2,$$

et par conséquent

$$2\overline{BI}^2 + 2\overline{IC}^2 = 4\overline{IK}^2 + 4\overline{BK}^2;$$

donc, en substituant dans l'égalité (1), il viendra :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = 4\overline{IK}^2 + 4\overline{BK}^2 + 4\overline{AI}^2.$$

Mais $4\overline{IK}^2$ est le carré de 2IK ; $4\overline{BK}^2$ est celui de 2BK, c'est-à-dire de BC, et, par la même raison, $4\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2$: nous aurons donc enfin :

$$\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 = (2IK)^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

311. COROLLAIRE. Si le quadrilatère ABCD était un parallélogramme, ses diagonales se couperaient en deux parties égales, de sorte que la droite qui joindrait leurs milieux serait nulle. On voit donc que *dans tout parallélogramme la somme des carrés des côtés est égale à celle des carrés des diagonales.*

THÉORÈME.

Fig. 159. 312. *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD *le produit des diagonales* AC, BD, *est égal à la somme des produits des côtés opposés* AB et CD, AD et BC.

Je fais au point B l'angle ABI = CBD, et je forme ainsi les deux triangles équiangles ABI et CBD : car l'angle BAC est égal à BDC comme inscrits dans le même segment BADC; ainsi ils ont deux angles égaux chacun à chacun; donc leurs côtés homologues sont proportionnels; donc

$$AB : BD :: AI : CD;$$

d'où l'on tire, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens :

$$AB \cdot CD = AI \cdot BD.$$

Les triangles IBC et ABD sont aussi équiangles : car les angles IBC et ABD sont composés de deux angles égaux chacun à chacun, et d'un angle commun IBD; donc ils sont égaux. De plus les angles BCI et BDA sont égaux comme inscrits dans le même segment BCDA : donc on a la proportion

$$BC : BD :: CI : AD;$$

d'où l'on tire :

$$BC \cdot AD = CI \cdot BD.$$

Ajoutons cette égalité à la précédente, et il viendra, en mettant BD en facteur commun :

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AI + CI)BD = AC \cdot BD,$$

ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈME.

Fig. 160 et 161. 313. *Etant données les cordes de deux arcs* CA'A *et* CB'B, *calculer les cordes de la somme et de la différence de ces arcs, connaissant d'ailleurs le rayon.*

Nous observerons d'abord que lorsque l'on connaît le rayon d'une circonférence, et la corde CA d'un arc quelconque CA'A, il est facile de calculer la distance OD de cette corde au centre:

car cette distance est un côté d'un triangle rectangle OCD, dont l'hypothénuse OC est le rayon, et dont l'autre côté CD est la moitié de la corde (102); on aura donc (303) :

$$OD = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \frac{\overline{AC}^2}{4}};$$

car $CD = \frac{AC}{2}$; ou, en réduisant l'entier $\overline{OC}^2$ au même dénominateur que la fraction qui l'accompagne,

$$OD = \sqrt{\frac{4\overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}{4}} = \frac{\sqrt{4\overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}}{2}.$$

On verra de même que

$$OF = \frac{\sqrt{4\overline{OC}^2 - \overline{BC}^2}}{2}.$$

Cela posé, nous pourrons regarder comme connues les distances OD et OF des deux cordes AC et BC au centre; nous conviendrons de représenter les arcs CA'A et CB'B respectivement par α et β, les longueurs de leurs cordes par A et B, les distances OD et OF de ces cordes au centre par a et b, et le rayon par R.

1.° AB est la corde qui sous-tend la somme des deux arcs CA'A et CB'B; or, si l'on joint DF, cette droite sera parallèle à AB (279) : donc les deux triangles CDF et CAB sont équiangles, et par conséquent Fig. 160.

$$CD : CA :: DF : AB.$$

Or CD est la moitié de CA : donc DF est la moitié de AB; ainsi $DF = \frac{\text{cord}(\alpha+\beta)}{2}$. Mais le quadrilatère ODCF est inscriptible, puisque ses angles D et F sont droits; donc on aura (312)

$$OC \cdot FD = CD \cdot OF + CF \cdot OD,$$

ou, ce qui revient au même :

$$R \cdot \frac{\text{cord}(\alpha+\beta)}{2} = \frac{A}{2} \cdot b + \frac{B}{2} \cdot a \ldots\ldots (1).$$

Multipliant tous les termes de cette égalité par 2, puis divisant par R, on aura enfin :

$$\text{Cord}(\alpha+\beta) = \frac{A \cdot b + B \cdot a}{R},$$

ce qui nous apprend que, *pour calculer la corde qui sous-*

tend la somme de deux arcs, il faut diviser par le rayon la somme des produits que l'on trouve en multipliant chaque corde par la distance de l'autre au centre.

Fig. 161. 2.° AB est la corde qui sous-tend la différence des deux arcs CA'A et CB'B; et l'on verra, comme tout à l'heure, que la droite DF est la moitié de cette corde; qu'ainsi $DF = \frac{\text{cord}(\alpha - \beta)}{2}$.

Cela posé, le quadrilatère ODFC est aussi inscriptible (154) : car les angles D et F sont droits; on aura donc :

$$OC \cdot DF + FC \cdot OD = CD \cdot OF;$$

d'où l'on tire aisément :

$$OC \cdot DF = CD \cdot OF - FC \cdot OD,$$

ce qui revient à

$$R \cdot \frac{\text{cord}(\alpha - \beta)}{2} = \frac{A}{2} \cdot b - \frac{B}{2} \cdot a \ldots\ldots (2);$$

d'où, en doublant tous les termes, et divisant ensuite par R :

$$\text{cord}(\alpha - \beta) = \frac{A \cdot b - B \cdot a}{R},$$

ce qui montre que, *pour calculer la corde qui sous-tend la différence de deux arcs, il faut diviser par le rayon la différence des produits que l'on obtient en multipliant chaque corde par la distance de l'autre au centre* (*a*).

(*a*) Remarquons que, si l'on représente par x et par y les moitiés des arcs α et β, les formules (1) et (2) reviennent aux formules trigonométriques connues

$$R \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin x \cos y$$
$$R \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin x \cos y.$$

Si maintenant on veut avoir les valeurs de $\cos(x+y)$ et de $\cos(x-y)$, on observera que le cosinus d'un arc étant le sinus de son complément, il n'y aura qu'à élever au point O la perpendiculaire OI' sur le rayon OB', et il ne s'agira plus que d'avoir le sinus de A'I'. Mais cet arc A'I' est la différence des deux arcs CA' et CI' : donc son sinus est la moitié de la corde qui sous-tend le double de cette différence, c'est-à-dire l'arc AI, obtenu en abaissant CGI perpendiculairement sur OI' : ce sinus est donc égal à DG, moitié de la corde AI. Or dans le quadrilatère OGDC on a

(Fig. 160)..... $OC \cdot GD + DC \cdot GO = CG \cdot OD$

(Fig. 161)..... $OC \cdot GD = OD \cdot GC + CD \cdot OG$

équations qui reviennent à

$R \cdot \cos(x+y) + \sin x \sin y = \cos x \cos y$, ou $R \cdot \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

$R \cdot \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Ainsi les formules qui font connaître les sinus et cosinus de la somme et de la différence des deux arcs se trouvent démontrées très-simplement, *quelle que soit la grandeur des arcs x et y.*

PROBLÈME.

314. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données a et b.*

Nous pouvons, pour résoudre ce problème, nous appuyer sur les propositions démontrées aux n.os 304, 1.o et 2.o, et 294. Si l'on veut employer la première, on observera que la droite demandée sera la perpendiculaire abaissée d'un des points de la circonférence sur le diamètre, et que a et b seront les deux segmens de ce diamètre. En conséquence, on portera les deux droites données a et b à la suite l'une de l'autre de A en O et de O en B; on décrira une demi-circonférence sur AB, comme diamètre, et l'on élèvera au point O la perpendiculaire OX sur AB. Cette droite OX résoudra le problème. Fig. 162.

Veut-on s'appuyer sur la propriété de la corde (304, 2.o), on dira : La droite demandée sera la corde; la plus grande, a, des deux droites données, sera le diamètre; et l'autre, b, sera la projection de cette corde sur ce diamètre. En conséquence on prendra sur une droite indéfinie deux parties $OA = a$ et $OB' = b$; sur OA, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence, on élèvera au point B' une perpendiculaire B'X' sur OA, et la corde OX' sera la moyenne proportionnelle demandée.

Enfin, si l'on veut faire usage de la propriété de la tangente (294), on dira : La droite demandée doit être la tangente, a la sécante, et b sa partie extérieure (on suppose $a > b$). On prendra donc sur une droite $OA = a$ une partie $OB = b$; on fera passer une circonférence par les deux points A et B; et en menant la tangente OX à cette circonférence (158 et 161), le problème sera résolu.

315. Les mêmes propositions (304, 1.o et 2.o; 294) fournissent de nouveaux moyens de trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données a et b, moyens qui sont utiles dans un grand nombre de cas.

Nous cherchons une droite x, telle que l'on ait :

$$a : b :: b : x.$$

Ainsi b doit être une moyenne proportionnelle entre a et x. Il suit de là, 1.o qu'on peut regarder (294) b comme une tangente, et l'une des deux droites a et x comme une sécante dont la partie extérieure serait l'autre droite. En conséquence on

Fig. 163. tirera sous un angle quelconque deux droites OA $=a$, OB $=b$, et l'on décrira une circonférence qui touche OB en B, et qui passe par le point A (116) : OX sera la troisième proportionnelle démandée ;

2.º Que b peut être la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypothénuse, et a et x seront les deux segmens de cette hypothénuse. Ainsi l'on

Fig. 164. prendra sur une droite indéfinie une partie OA $=a$; on élèvera au point O une perpendiculaire OB $=b$; on joindra AB, et l'on mènera BX perpendiculaire sur AB : OX résoudra le problème.

3.º Enfin on peut regarder b comme une corde dont x serait la projection sur le diamètre a, si $a > b$, et dont a serait au contraire la projection sur le diamètre x, si $a < b$.

Fig. 165. Dans le premier cas on décrira sur OA $=a$, comme diamètre, une demi-circonférence ; on mènera une corde OB $=b$, et l'on abaissera de B la perpendiculaire BX sur le diamètre.

Fig. 164. Dans le second cas on élèvera à l'extrémité O d'une droite OA $=a$ une perpendiculaire que l'on coupera par un arc décrit de A comme centre, avec b pour rayon ; on joindra AB, et l'on tirera BX perpendiculairement à cette droite. Dans les deux cas OX résoudra le problème.

PROBLÈME.

Fig. 166. 316. *Partager une droite donnée* AB *en moyenne et extrême raison*, c'est-à-dire en deux segmens tels que l'un d'eux soit moyen proportionnel entre la droite donnée et l'autre segment. Le segment qui doit être moyen proportionnel est évidemment le plus grand.

Supposons que la droite AB soit divisée au point X en moyenne et extrême raison, et que AX soit le plus grand des deux segmens ; on aura donc :

$$AB : AX :: AX : BX.$$

Comme cette proportion contient deux inconnues AX et BX, il faut tâcher d'en faire évanouir une. Pour cela nous lui appliquerons ce principe d'arithmétique, que dans toute proportion la somme des deux premiers termes est à celle des deux derniers comme le premier est au troisième, et il viendra :

$$AB + AX : AB :: AB : AX :$$

car AB $=$ AX $+$ BX. Or, si l'on regarde cette proportion comme résultant du théorème du n.º 294, AB sera la tangente,

AB + AX la sécante, et AX sa partie extérieure; de sorte que AB sera égal à la partie intérieure de cette sécante, ce qui aura lieu si le diamètre est égal à AB, et que la sécante passe par le centre. En conséquence, à l'extrémité B de AB on élèvera une perpendiculaire BO égale à la moitié de cette droite; du point O comme centre, avec le rayon OB, on décrira une circonférence qui sera ainsi tangente à AB, et l'on mènera une sécante par les points A et O; rabattant enfin AC sur AB, le problème sera résolu.

Si l'on veut démontrer cette construction *à posteriori*, on dira: La tangente AB est moyenne proportionnelle entre la sécante AD et sa partie extérieure AC; ainsi

$$AD : AB :: AB : AC \text{............} (1) :$$

d'où, *dividendo :*

$$AD - AB : AB - AC :: AB : AC.$$

Or, puisque $AB = CD$, et que $AC = AX$, on voit que $AD - AB = AC = AX$, et que $AB - AC = BX$; on aura donc, en remplaçant :

$$AX : BX :: AB : AX,$$

ou, en mettant les extrêmes à la place des moyens :

$$AB : AX :: AX : BX,$$

proportion qui prouve que AB est divisée au point X en moyenne et extrême raison.

317. Scholie. Si dans la proportion (1) on remplace AB par son égale CD, il viendra :

$$AD : CD :: CD : AC.$$

Ainsi la sécante AD est aussi divisée au point C en moyenne et extrême raison.

Cette remarque fournit le moyen de retrouver la droite qui a été partagée en moyenne et extrême raison, lorsque l'on connaît le plus grand de ses deux segmens. Il suffit, pour cela, d'effectuer la construction nécessaire pour partager ce segment lui-même en moyenne et extrême raison; et la sécante résout le problème.

Remarquons encore que si l'on voulait partager AX en moyenne et extrême raison, il n'y aurait qu'à porter BX sur AX.

PROBLÈME.

318. *Décrire une circonférence qui touche une droite*
Fig. 167. *donnée* AB, *et passe en outre par deux points donnés* C *et* D.

Supposons le problème résolu, et soit B le point où la circonférence demandée touche la droite AB. Il est clair que si l'on connaissait ce point, la circonférence serait déterminée (99). Or, si nous prolongeons CD jusqu'à sa rencontre avec AB en A, la tangente AB sera moyenne proportionnelle entre la sécante AD et sa partie extérieure AC : donc, en cherchant cette moyenne proportionnelle, et la portant sur AB, on déterminera le point de contact B. Comme il n'y a pas de raison pour la porter d'un côté de A plutôt que de l'autre, on prendra aussi AB′ égale à la moyenne proportionnelle, et en faisant passer une première circonférence par B, C et D, et une seconde par B′, C et D, on obtiendra deux solutions du problème.

Ceci suppose la réciproque du théorème du n.° 294; mais il est facile de la démontrer en suivant la règle du n.° 59 : ainsi nous ne nous y arrêterons pas.

Si la droite CD était parallèle à AB, la construction précédente serait impossible; mais on observerait qu'en vertu du théorème du n.° 117, la perpendiculaire élevée sur le milieu de CD irait passer au point de contact, et le déterminerait ainsi.

PROBLÈME.

319. *Décrire une circonférence qui, passant par deux*
Fig. 168. *points donnés* A *et* B, *soit en outre tangente à une circonférence donnée* O.

Je décris une circonférence qui passe par les deux points donnés A et B, et qui coupe la circonférence O en deux points C et D. Alors, si du point de section F des deux cordes AB et CD je mène une tangente à la circonférence O, le point T où elle la touchera sera précisément le point de contact de cette circonférence avec celle que l'on demande : car le carré de cette tangente, étant égal au produit FC.FD, le sera aussi au produit FA.FB; et ainsi la circonférence qui passera par les trois points A, B, T, touchera la droite FT, et par conséquent la circonférence O au point T.

Le problème aura donc deux solutions, puisque du point F

on pourra toujours mener deux tangentes à la circonférence O, à moins que l'un des points donnés ne soit intérieur à cette circonférence, et que l'autre ne lui soit extérieur : alors le problème serait impossible. Nous observerons toutefois que si la droite AB était tangente à la circonférence donnée, l'un des points de contact se trouverait sur cette droite, de sorte que la circonférence tangente en ce point se réduirait à la droite AB elle-même (171).

Si la perpendiculaire abaissée du centre O sur AB passait par le milieu de cette droite, les deux cordes AB et CD couperaient alors cette droite à angles droits (103, 166), et seraient ainsi parallèles : donc les tangentes FT et FT' leur seraient parallèles, et les points de contact T et T' se trouveraient précisément aux intersections de la circonférence O avec la perpendiculaire dont il s'agit.

PROBLÈME.

320. *Par un point* O *donné sur le plan d'un angle* BAC, *mener une sécante telle que les deux parties comprises entre ce point et les côtés* AB *et* AC *soient proportionnelles à deux lignes données p et q.* Fig. 169 et 170.

Supposons le problème résolu, et soit OCB la sécante demandée. On aura donc :

$$OB : OC :: p : q.$$

Or, si l'on mène par le point O, OD parallèle à AC jusqu'à la rencontre de BA, prolongée s'il est nécessaire, on aura pareillement (277) :

$$BD : AD :: BO : CO;$$

Donc, à cause du rapport commun,

$$BD : AD :: p : q.$$

Ainsi la ligne inconnue BD est une quatrième proportionnelle aux trois droites connues q, p et AD. On cherchera donc cette quatrième proportionnelle, en exécutant la construction indiquée sur la figure; et en faisant passer une sécante par son extrémité B et par le point O, le problème sera résolu.

Ce problème trouverait son application dans l'architecture, si l'on voulait faire sur l'angle BAC d'un mur un pan coupé, et qu'une porte, dont la position serait déterminée par suite de quelque convenance, dût se trouver au milieu de ce pan. Il suf- Fig. 170.

firait alors de mener par le milieu O de l'ouverture de la porte une sécante qui fût divisée en ce point en deux parties égales.

PROBLÈME.

Fig. 171. 321. *Trouver sur un côté BC d'un triangle un point tel que ses distances aux extrémités de ce côté soient proportionnelles aux côtés adjacens.*

Il peut se présenter deux cas, selon que le point demandé devra se trouver sur le côté BC ou sur son prolongement.

Premier cas. En appliquant la méthode du n.° 281, nous serons conduits à prolonger AC d'une quantité AD=AB, à joindre BD, et à mener par le point A une parallèle AI à cette droite. Le point I résoudra le problème.

Si nous remarquons que l'angle DBA=BAI, et que BDA=IAC (86, 1.° et 3.°); que, de plus, l'angle DBA est égal à BDA, puisque le triangle BAD est isocèle (196), on en conclura que la droite AI divise l'angle BAC en deux parties égales: donc, *pour partager un côté d'un triangle en parties proportionnelles aux côtés adjacens, il suffit de diviser l'angle opposé en deux parties égales.*

Second cas. Puisque dans notre figure AC > AB, le point demandé doit se trouver sur le prolongement de CB : ainsi on reportera AB sur AC de A en D', on joindra D'B, et on lui mènera la parallèle AI'.

On verrait facilement que la droite AI' partage en deux parties égales le supplément DAB de l'angle BAC. Les deux droites AI et AI' se coupent donc à angle droit, puisque le double de I'AI vaut deux droits.

322. SCHOLIE. Il serait facile de démontrer directement, ou par la règle du n.° 59, que *toute droite qui divise un angle intérieur ou extérieur d'un triangle en deux parties égales, coupe le côté opposé en un point dont les distances aux extrémités de ce côté sont proportionnelles aux côtés adjacens.*

PROBLÈME.

323. *Trouver le lieu géométrique de tous les points dont les distances à deux points fixes C et B soient proportionnelles à deux droites données p et q.*

Nous aurons d'abord un point I du lieu demandé en partageant la droite CB en parties proportionnelles à p et à q, ce qui est facile. Il existe encore un second point de ce lieu sur le prolongement de CB, *à gauche* de B : car $p > q$. Appelons ce point inconnu I', et nous devrons avoir la proportion

$$I'C : I'B :: p : q,$$

qui contient deux inconnues ; mais la différence $I'C - I'B = CB$; ainsi, *dividendo*, nous aurons :

$$CB : I'C :: p - q : p.$$

I'C est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues $p - q$, p et CB : donc il sera facile de déterminer le point I' par la construction indiquée sur la figure, où $CP = p$, $PQ = PQ' = q$.

Cela posé, si l'on joint un quelconque A des points du lieu géométrique demandé avec les points B et C, il suit du n.° 322 que les droites qui diviseront l'angle A et son supplément en deux parties égales, iront passer respectivement aux points I et I' : car elles couperont BC en deux points dont les distances aux points C et B seront proportionnelles aux côtés adjacens CA et AB, et par conséquent aux lignes p et q. Mais ces droites se couperont à angle droit : donc leur point de section A est sur la circonférence décrite sur II' comme diamètre (154) ; et, comme ce point A est un quelconque des points dont les distances aux points C et B sont dans le rapport $p : q$, il s'ensuit que cette circonférence est le lieu géométrique de tous ces points.

Il sera maintenant facile de résoudre cet autre problème :

Trouver un point dont les distances aux trois sommets A, B, C *d'un triangle soient proportionnelles à trois droites données* p, q, r.

Nous observerons seulement que dans le cas où le point demandé devrait être équidistant des trois sommets A, B, C, les deux solutions se réduiraient à une seule, qui serait le centre du cercle circonscrit au triangle (99).



CHAPITRE III.

DES FIGURES SEMBLABLES.

324. *Deux figures sont* SEMBLABLES *lorsqu'on peut les placer de telle sorte qu'en menant par un même point des droites aux différens points des deux lignes qui les terminent, les* RAYONS VECTEURS (c'est ainsi que l'on appelle ces droites) *dont les directions coïncident, soient proportionnels.*

Les lignes qui terminent les deux figures sont aussi dites semblables.

Fig. 172. Ainsi, supposons que l'on ait transporté la figure *abck* en A'B'C'K', et qu'en tirant par un certain point O les droites quelconques OA, OB, OC...... qui rencontrent la courbe A'B'C'K' aux points respectifs A', B', C', K'...... on ait la suite de rapports égaux

$$OA : OA' :: OB : OB' :: OC : OC' :: \text{etc.},$$

la figure et la ligne *abck* seront semblables à la figure et à la ligne ABCK.

L'origine commune O de tous les rayons vecteurs se nomme le *centre de similitude* des deux figures ou des deux lignes ABCK, A'B'C'K', et les rayons vecteurs dont les directions coïncident sont dits *homologues*. Tels sont OA et OA'.

325. Si, en ramenant la figure A'B'C'K' à sa position primitive *abck*, le point O va se placer en *o*, on dit que ces points O et *o* sont *les centres de similitude* de ABCK et de *abck*.

Si les rayons homologues sont parallèles et dirigés dans le même sens, les deux figures sont alors semblables et *semblablement placées*. Sinon, elles sont simplement semblables.

Il est évident que les rayons vecteurs de l'une des deux lignes font entre eux les mêmes angles que les rayons vecteurs homologues de l'autre, c'est-à-dire que ceux auxquels ils sont proportionnels.

326. Il suit de là que pour construire une ligne semblable à une autre ABCK, on mènera d'un point quelconque O des rayons vecteurs à des points A, B, C...... de celle-ci, d'au-

tant plus rapprochés que l'on voudra plus d'exactitude; puis on tirera par un point quelconque *o* des droites *oa*, *ob*, *oc*...... telles que les angles formés par la première avec toutes les autres soient respectivement égaux à ceux que OA fait avec OB, OC... Prenant ensuite sur ces droites des distances *oa*, *ob*, *oc*..... proportionnelles à OA, OB, OC.... et unissant les points *a*, *b*, *c*..... par un trait continu, le problème sera résolu.

Tel est précisément le moyen que l'on a employé pour connaître la nature de l'orbite du soleil.

Concevons, en effet, que l'on mène un plan par l'œil d'un observateur et par le centre du soleil : ce plan coupera la surface de cet astre suivant une circonférence de cercle, et l'angle formé par les rayons visuels tangens à cette circonférence sera *le diamètre apparent du soleil.* Or c'est une règle d'optique, que *les angles visuels sous lesquels on aperçoit un même objet très-petit ou très-éloigné sont réciproques à sa distance.* Si donc on observe tous les jours de l'année le diamètre apparent du soleil, on pourra en déduire les rapports qu'ont entre elles les distances correspondantes de cet astre à la terre. Ainsi, par exemple, les diamètres apparens du soleil étaient, le 22 mars et le 22 juin 1807, respectivement $0^c,59512$ et $0^c,58383$: donc les distances de cet astre à la terre étaient alors dans le rapport de 58383 à 59512, de sorte qu'en prenant la première de ces distances pour unité, la seconde valait 1,019. Cela posé, à partir d'un point donné qui représente le lieu de l'observateur, menons sur un plan une suite de rayons vecteurs qui fassent entre eux des angles respectivement égaux aux angles diurnes que décrit la droite tirée de l'observateur au centre du soleil, et qui représenteront ainsi les rayons visuels menés chaque jour à ce centre. Portons sur leur direction, à partir du point fixe, les distances correspondantes du soleil à l'observateur, calculées en prenant une d'elles pour unité, et les points déterminés de cette manière indiqueront pour chaque jour le lieu du soleil, de sorte que la courbe qui les unira sera semblable à l'orbite de cet astre.

THÉORÈME.

327. *Lorsque deux figures* ABCK *et abck sont semblables, on peut prendre pour centre de similitude de l'une tel point que l'on veut de son plan, et il y aura toujours pour l'autre un centre correspondant de similitude.*

Puisque les deux figures sont semblables, on peut placer *abck* en A'B'C'K' de telle manière qu'en tirant d'un certain point O des droites quelconques OA, OB, OC...... qui coupent la figure A'B'C'K' aux points respectifs A', B', C'...... on ait :

$$OA : OA' :: OB : OB' :: \text{etc.}$$

et O est alors leur centre commun de similitude. Cela posé, prenons sur le plan des deux figures un point arbitraire F, et joignons FO, FA, FB..... menons A'I parallèle à FA, et tirons IB'; on aura (277) :

$$OF : OI :: OA : OA';$$

mais $OA : OA' :: OB : OB';$

donc $OF : OI :: OB : OB';$

donc IB' est parallèle à FB (279). Par la même raison IC' est parallèle à FC, et ainsi de suite : donc, si par tous les points A', B', C'...... on mène les parallèles A'A'', B'B'', C'C''....... à FI, ces droites lui seront égales (224), et la figure A''B''C''K'' ne sera autre chose que A'B'C'K' transportée parallèlement à elle-même. Mais, comme les triangles FOA et IOA', FOB et IOB'...... sont équiangles, leurs côtés homologues sont proportionnels (286), et l'on a ainsi les proportions

$$OF : OI :: FA : IA' \text{ ou } FA'',$$
$$OF : OI :: FB : IB' \text{ ou } FB'',$$
etc. :

donc $FA : FA'' :: FB : FB'' :: \text{etc.};$

donc le point F est aussi un centre de similitude des deux figures ABCK et A''B''C''K'' (324).

328. Scholie. Remarquons que le point F aurait pu être pris sur l'une des deux figures, ABCK, par exemple. Dans ce cas le point I eût été un point du périmètre de la seconde : car il divise OF dans le rapport de OA à OA', de sorte qu'en transportant la figure A'B'C'K' en A''B''C''K'', le point I aurait été se placer en F : donc I eût été le centre de similitude de A'B'C'K' correspondant au centre F de ABCK.

Remarquons encore que, quel que soit le centre de similitude que l'on choisisse, le rapport des rayons vecteurs homologues, c'est-à-dire *le rapport de similitude*, sera toujours le même : car $FA : FA'' :: OA : OA'$.

329. Avant d'aller plus loin, nous observerons que *deux*

lignes droites quelconques AB *et* CD *sont semblables:* car, si l'on joint un point arbitraire O avec les extrémités de AB, on pourra toujours inscrire dans le triangle OAB, parallèlement au côté AB, une droite C'D' = CD, et cette droite coupera en parties proportionnelles toutes les lignes menées du point O à AB (288). Fig. 173.

330. *Dans deux circonférences différentes les arcs* AMB *et* A'M'B', *les secteurs* OAMB *et* O'A'M'B' (on appelle *secteur* la portion d'un cercle comprise entre un arc et les deux rayons menés aux extrémités de cet arc) *et les segmens* AMBA *et* A'M'B'A' (un *segment* est la portion d'un cercle comprise entre un arc et sa corde) *qui correspondent à des angles au centre égaux, sont semblables :* car, en faisant coïncider ces deux angles, on reconnaît immédiatement que les rayons du plus grand des deux arcs, et les droites menées de son centre à sa corde, sont coupés en parties proportionnelles respectivement par le plus petit arc et par sa corde. Fig. 174.

On peut conclure de là que *deux circonférences sont semblables,* mais il est facile aussi de le démontrer *à priori.*

Il suit en effet du n.° 290 que *les droites qui*, comme AA' ou AA'', *joignent les extrémités de deux rayons parallèles, et dirigés dans le même sens ou en sens contraires, vont concourir en un même point* C ou C' *sur la droite* OO', *qui joint les centres.* Or je dis que ces points C et C' sont chacun un centre de similitude commun aux deux circonférences : car, si, par le point C, on mène un rayon vecteur quelconque CB'B, et que l'on joigne OB et OB', ces deux lignes seront parallèles, sans quoi, en menant par le centre O le rayon OI parallèle à O'B', et joignant IB', cette droite devrait aller passer par le point C, ce qui est absurde (8). Les triangles OCB et O'CB' sont donc équiangles : donc le rapport de CB à CB' est le même que celui de OB à O'B', et est par conséquent constant.

Donc deux circonférences sont deux courbes semblables qui ont deux centres communs de similitude.

331. Corollaire. Il suit de ce que nous venons d'établir, qu'une tangente commune à deux circonférences va passer par l'un de leurs centres de similitude, et qu'ainsi, pour mener une tangente commune à deux cercles, il n'y aura qu'à chercher les centres de similitude interne et externe C' et C, et mener de

chacun de ces points deux tangentes à l'une de ces circonférences.

Pour déterminer les centres de similitude C et C' le plus exactement possible, on aura soin de mener le rayon OA très-près de OT, ce qui est facile : car, en disposant une règle tangentiellement aux deux circonférences, on voit à peu près où doit se trouver le point de contact. De cette manière la droite AA' est moins oblique sur OO'.

Remarquons que ce moyen de déterminer les tangentes externes pourrait devenir impraticable si les rayons des deux circonférences étaient presque égaux : car alors le centre de similitude C serait très-éloigné de O'. On aurait alors recours à la méthode du n.° 292, ou mieux encore au procédé du n.° 164.

THÉORÈME.

332. *Si deux figures sont semblables, et que l'une soit rectiligne, l'autre le sera aussi; elles auront chacune le même nombre d'angles et de côtés; leurs angles seront égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues* (ceux qui sont adjacens à des angles égaux) *seront proportionnels.*

Puisque les deux figures sont semblables, on pourra les placer
Fig. 175. de manière qu'elles aient un même centre de similitude O. Joignons maintenant ce point aux sommets A, B, C...... de la figure rectiligne, et soient A', B', C'...... les points où les droites de jonction rencontrent le périmètre de la seconde figure. Si l'on tire A'B', on verra que cette droite, étant parallèle à AB (279), coupe en parties proportionnelles à OA et à OA' toutes les droites menées de O à AB (288); mais la portion du périmètre de la seconde figure qui est comprise entre OA' et OB', jouit de la même propriété : donc elle coïncide avec A'B'; donc à chaque côté du polygone ABCDE, correspond un côté de la seconde figure, qui est ainsi un polygone. En second lieu, les angles des deux figures seront égaux chacun à chacun comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Enfin leurs côtés homologues seront proportionnels : car, comme deux triangles équiangles jouissent de cette propriété, le rapport de AB à A'B' est le même que celui de OA à OA', et est par conséquent constant.

333. SCHOLIE. Remarquons que l'on aurait pu prendre pour centre de similitude l'un quelconque des sommets du polygone

ABCDE, et qu'alors le centre de similitude du second eût été le sommet homologue de ce second polygone.

Si le centre de similitude du premier polygone eût été placé en I sur un côté quelconque AB, le centre de similitude du second aurait divisé le côté homologue ab dans le rapport de AI à BI.

Enfin, si le centre de similitude du polygone ABCDE est un point quelconque O de son plan, on obtiendra celui du second en construisant sur un quelconque de ses côtés ab un triangle équiangle au triangle OAB, qui a pour base le côté homologue de ABCDE.

334. Il suit de là que, *dans deux polygones semblables, les côtés et les diagonales homologues sont proportionnels.*

THÉORÈME.

335. Réciproquement, *deux polygones sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun*, savoir: $A=a$, $B=b$, $C=c$..... *et leurs côtés homologues proportionnels*, de sorte que l'on ait:

$$AB : ab :: BC : bc : CD : cd :: \text{etc.}$$

D'un point quelconque O, menons des droites à tous les sommets du polygone ABCDE; prenons ensuite sur le rayon vecteur OA une distance OA', quatrième proportionnelle à deux côtés homologues quelconques AB, ab, des deux polygones et à OA; et tirons A'B' parallèle à AB: cette droite sera égale à ab; car, les triangles OAB, OA'B' étant équiangles, on a:

$$AB : A'B' :: OA : OA'.$$

Mais, par construction,

$$AB : ab :: OA : OA':$$

donc, puisque ces deux proportions ont trois termes correspondans égaux, leurs quatrièmes termes A'B' et ab sont égaux. Par le point B', menons de même B'C', parallèle à BC, et par conséquent égale à bc; puis C'D', parallèle à CD, et par conséquent égale à cd, etc. Le polygone A'B'C'D'E' ainsi formé aura ses côtés égaux chacun à chacun à ceux de $abcde$; ces deux polygones sont d'ailleurs équiangles comme l'étant tous deux à ABCDE: donc ils sont égaux (262). Mais A'B'C'D'E' est semblable à ABCDE (321): donc $abcde$ lui est aussi semblable.

336. Scholie. Remarquons qu'il suffit, pour que les deux polygones ABCDE et *abcde* soient semblables, qu'ils aient tous leurs côtés moins un proportionnels, et les angles compris égaux chacun à chacun; ou que tous leurs angles moins un soient égaux chacun à chacun, et que les côtés intermédiaires soient proportionnels : car alors les deux polygones *abcde* et A'B'C'D'E' seront égaux (262 et 263), et le dernier est toujours semblable à ABCDE.

337. Corollaire. 1.° *Tous les carrés sont semblables;* 2.° *deux losanges qui ont un angle égal;* 3.° *deux rectangles dont deux côtés adjacens sont proportionnels;* 4.° *deux parallélogrammes qui ont un angle egal compris entre côtés proportionnels sont semblables.*

338. On peut remarquer que la similitude de ces quadrilatères résulte immédiatement de la définition des figures semblables: car, si l'on considère, par exemple, deux parallélogrammes qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, on pourra placer les deux angles égaux l'un sur l'autre, de manière que leurs côtés homologues soient dans la même direction. Alors tout rayon vecteur qui, parti de A, coupera B'C', sera
Fig. 176. divisé par cette ligne dans le rapport $\frac{AB}{AB'}$ (288); et tout rayon vecteur qui, parti de A, coupera C'D', sera divisé par cette ligne dans le rapport $\frac{AD}{AD'}$; mais ce rapport est égal à $\frac{AB}{AB'}$: donc les rayons vecteurs homologues sont proportionnels (*a*); donc les deux parallélogrammes sont semblables.

THÉORÈME.

339. *Deux polygones semblables quelconques peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement placés.*

Fig. 175. La démonstration du n.° 335 a prouvé que les triangles OAB et OA'B', OBC et OB'C', etc., étaient semblables; et, comme OA'B' $=$ *oab*, que OB'C' $=$ *obc*, etc., on en conclut que si l'un

(*a*) Remarquons d'ailleurs qu'à chaque point I de AD répond un point homologue de AD' : car si par le point B' on mène B'I' parallèle à BI, on aura AB : AB' :: AI : A'I'.

des polygones est susceptible d'être partagé en triangles par des droites issues d'un même point, ce qui aura toujours lieu s'il est convexe, tout polygone qui lui sera semblable jouira de la même propriété, et les triangles dans lesquels on les aura décomposés seront semblables chacun à chacun, et semblablement placés (*a*).

Si les triangles dans lesquels on veut partager les deux polygones ne devaient pas avoir tous un sommet commun, ce qui pourrait arriver si ces polygones étaient concaves, on reconnaîtrait encore que ces triangles sont semblables en regardant chaque polygone comme la somme de plusieurs polygones convexes semblables, ce qui est permis (336); ou bien on prendra successivement les sommets D et A communs à différentes suites de triangles Fig. 177. pour centres de similitude, et l'on verra encore ainsi que les deux polygones sont décomposables en triangles semblables et semblablement placés.

THÉORÈME.

340. Réciproquement, *deux polygones qui sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement placés, sont semblables.*

Il pourra se présenter deux cas, selon que les triangles auront ou n'auront pas tous un sommet commun.

Premier cas. Supposons que les triangles AOB et *aob*, BOC Fig. 175. et *boc*, etc., soient semblables et semblablement placés. Il résulte immédiatement de la première de ces deux hypothèses que leurs angles en O et en *o* sont égaux chacun à chacun, de sorte que l'on pourra placer le second polygone dans le premier, de telle manière que les côtés de l'angle *aob* tombent sur leurs homologues. Mais, comme nous supposons en outre que les triangles des deux polygones sont semblablement placés, les côtés *oc*,

---

(*a*) C'est-à-dire que les deux angles dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble deux triangles du premier polygone, sont homologues de ceux dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble les deux triangles semblables du second. Ainsi, pour construire sur la droite *ab*, homologue de AB, une suite de triangles semblables à ceux du polygone ABCDE, et semblablement placés, on fera sur cette droite un triangle semblable à ABO; puis sur *bo* un triangle semblable à BOC, avec cette condition, que l'angle *cbo* soit égal à CBO, et que *boc* soit égal à BOC, et ainsi de suite (347).

od..... prendront de même les directions OC, OD..... Ainsi les côtés *ab*, *bc*...... du second polygone seront venus se placer en A'B', B'C'.... *parallèlement* aux côtés homologues AB, BC..... du premier, puisque les points A', B', C'..... divisent les droites OA, OB, OC..... en parties proportionnelles. Donc tous les rayons vecteurs menés de O au contour du polygone ABCDE seront coupés en parties proportionnelles par le périmètre de A'B'C'D'E' : donc les deux polygones sont semblables.

Second cas. Si les triangles de chaque polygone n'ont pas tous un sommet commun, nous pourrons regarder les deux polygones comme formés de plusieurs autres polygones juxtaposés, dont chacun est décomposé en triangles ayant tous un même sommet. Ces polygones partiels seront ainsi semblables chacun à chacun; de sorte qu'il suffit de prouver que deux polygones composés de deux autres polygones semblables, et semblablement placés, sont semblables: car la démonstration s'étendra évidemment de deux à trois, puis à quatre, etc., polygones. Or, en pre-
Fig. 177. nant pour centres de similitude les sommets A et *a* communs aux deux polygones partiels, il suit de la définition (324) que tous les rayons vecteurs homologues menés de A et de *a* seront proportionnels aux diagonales de jonction AE et *ae*, et partant proportionnels entre eux : donc les deux polygones sont semblables.

341. COROLLAIRE. *Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, et semblablement placés.*

THÉORÈME.

Fig. 178. 342. *Si l'on joint les extrémités* F *et* G, *f et g, de deux droites* FG *et fg, avec tous les sommets de deux polygones, et que tous les triangles ainsi formés soient semblables et semblablement placés, les deux polygones seront semblables.*

Supposons, en effet, que tous les triangles FAG et *fag*, FBG et *fbg*, FCG et *fcg*, etc., soient semblables et semblablement placés; prenons FG' = *fg*, et portons le polygone *abcde* sur ABCDE, en plaçant les points *f* et *g* sur leurs homologues F et G'. Les triangles FAG et *fag*, FBG et *fbg*, etc., sont équiangles, puisqu'ils sont semblables; et, comme de plus ils sont semblablement placés, on voit que tous les côtés *fa*, *fb*, *fc*.....

issus de a, tomberont sur leurs homologues FA, FB, FC..... et que ga, gb, gc..... iront se placer en G'A', G'B', G'C'..... parallèlement à leurs homologues GA, GB, GC....: donc les points A', B', C'..... couperont FA, FB, FC..... dans le rapport constant de FG à FG'; et ainsi le périmètre du polygone $A'B'C'D'E$ sera parallèle à celui de ABCDE : donc ces deux polygones seront semblables, et auront F pour centre commun de similitude, ce qui démontre notre théorème.

THÉORÈME.

343. *Les périmètres de deux polygones semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces polygones.*

En effet ces deux polygones ont leurs côtés homologues proportionnels : donc on peut former avec ces côtés une suite de rapports égaux, dont les antécédens seront les côtés du premier, et les conséquens les côtés homologues du second; donc on en déduira, d'après un principe connu d'arithmétique (221), que

La somme de tous les côtés du premier, ou son périmètre, *est à* la somme de tous les côtés du second ou son périmètre, *comme* un côté du premier *est* au côté homologue du second.

PROBLÈME.

344. *Construire un polygone semblable à un polygone donné* ABCDE, *connaissant son périmètre p.* Fig. 179.

On partagera la droite donnée A'K $= p$ en parties proportionnelles aux côtés AB, BC..... du polygone donné, ce qui fera connaître les côtés A'b, bc, cd.... de la figure demandée; et, comme ses angles doivent être égaux à ceux de ABCDE, on pourra le construire d'après la méthode du n.º 266. Mais, comme on n'aura ainsi employé que les côtés A'b, bc, cd, de, il faudra prouver que le dernier côté A'e' est égal à eK (en vérifiant sur la figure qu'il en est ainsi, on aura une preuve de l'exactitude de la construction). Or la similitude des polygones ABCDE, A'$b'c'd'e'$ donne la proportion,

$$A'b : AB \text{ ou } A'B' :: A'e' : AE \text{ ou } E'A'.$$

Mais, par construction,

$$A'b : A'B' :: eK : E'A';$$

donc A'$e' = e$K.

PROBLÈME.

345. *Construire deux polygones semblables à un troisième, dont les contours forment une somme égale à celui de ce troisième, et de plus soient proportionnels à deux droites données p et q.*

En partageant le périmètre du polygone donné en parties proportionnelles à p et à q (281), on aura les périmètres des polygones demandés, et le problème sera ainsi ramené au précédent.

346. Les conditions de similitude de deux polygones doivent renfermer implicitement celles qui établissent que deux triangles sont semblables; mais on conçoit cependant que quelques-unes de ces conditions peuvent être une conséquence indispensable des autres. C'est ainsi, par exemple, que deux losanges sont semblables par cela seul qu'elles ont un angle égal (337). On a, en effet, reconnu que deux triangles sont semblables dans cinq cas que nous allons examiner successivement.

THÉORÈME.

347. *Deux triangles sont semblables quand ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

En effet, leurs côtés homologues sont proportionnels, de sorte que ces triangles satisfont ainsi aux conditions énoncées au n.o 335.

On pourrait, au reste, démontrer cette proposition directement de la manière suivante :

Fig. 146. Soient, en effet, ABC et A'B'C' les deux triangles proposés. Prenons AD=A'B', AF=A'C', et joignons DF. Le triangle ADF sera égal à A'B'C' (199): car l'angle A=A'. Ainsi les angles homologues B' et D seront égaux : donc B=D; donc les droites DF et BC sont parallèles (87); donc tous les rayons vecteurs menés de A à BC seront coupés en parties proportionnelles par DF; donc les triangles ABC et ADF ou A'B'C' sont semblables.

THÉORÈME.

348. *Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles.*

En effet, nous avons vu que deux angles dont les côtés sont

parallèles sont égaux ou supplémentaires (90); de sorte que si les triangles ne sont pas équiangles, il ne pourra se présenter que les trois cas suivans :

1.° Les trois angles de l'un des triangles seront supplémentaires de ceux de l'autre ; mais alors la somme de leurs six angles vaudra six droits, ce qui ne se peut (186).

2.° Deux angles de l'un seront supplémentaires de deux angles de l'autre, le troisième étant égal de part et d'autre ; mais alors la somme des six angles surpassera encore quatre droits, ce qui est absurde.

3.° Un angle de l'un des triangles sera supplément d'un angle du second, les deux autres angles du premier étant respectivement égaux aux deux autres du second ; mais alors la somme des angles de l'un ne sera pas égale à celle des angles de l'autre, à moins que les deux angles supplémentaires ne soient droits, auquel cas les deux triangles seront équiangles.

Donc les deux triangles sont équiangles, et partant semblables (347).

THÉORÈME.

349. *Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires.*

La démonstration est la même que la précédente.

350. Scholie. Remarquez avec soin que dans ces deux derniers cas de similitude de deux triangles, les côtés homologues sont ceux qui sont respectivement parallèles ou perpendiculaires : car deux pareils côtés se trouvent précisément opposés à deux angles dont les côtés sont eux-mêmes parallèles ou perpendiculaires, c'est-à-dire à deux angles égaux.

THÉORÈME.

351. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *sont semblables lorsque leurs côtés sont proportionnels.*

Supposons les côtés AB, AC et BC proportionnels aux côtés respectifs A'B', A'C' et B'C'. Prenons, comme au n.° 347, AD = A'B', AF = A'C', et joignons DF. Cette droite coupera donc les côtés AB et AC en parties proportionnelles, et sera par conséquent parallèle à BC : ainsi le triangle ADF sera semblable à ABC, et leurs côtés homologues seront proportionnels ; on aura donc la proportion

AB : AD :: BC : DF.

Mais on a aussi, par hypothèse :

AB : A'B' :: BC : B'C' :

donc, puisque AD=A'B', ces deux proportions ont trois termes correspondans égaux, et ainsi leurs *quatrièmes* termes DF et B'C' sont égaux. Il s'ensuit que le triangle A'B'C' est égal à ADF (207), et par conséquent semblable à ABC.

THÉORÈME.

352. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *qui ont un angle égal* A=A' *compris entre côtés proportionnels* AB *et* A'B', AC *et* A'C', c'est-à-dire tels que l'on ait :

AB : A'B' :: AC : A'C',

sont semblables.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la scholie du n.° 336. Au reste on pourra la démontrer *à priori* en répétant la démonstration du n.° 347.

353. Scholie. Nous avons démontré (335) que deux polygones étaient semblables quand ils avaient leurs angles égaux chacun à chacun, et que leurs côtés homologues étaient proportionnels; mais nous voyons maintenant que pour deux triangles l'une de ces conditions est une conséquence indispensable de l'autre (347 et 351). Il n'en est pas de même dans les figures qui ont plus de trois côtés. Ainsi, par exemple, le rectangle et le carré sont équiangles, mais leurs côtés ne sont point proportionnels; de même une losange et un carré ont leurs côtés proportionnels, et ils ne sont pas équiangles. Mais on peut le démontrer généralement de la manière suivante :

Fig. 180. Menons, en effet, dans le polygone quelconque ABCDE, la parallèle D'E' au côté DE : il est clair que le polygone ABCD'E' est équiangle à ABCDE, mais que leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels.

Actuellement décrivons deux arcs des points A et C comme centres, avec les rayons respectifs AB et CB, et joignons B'A et B'C : les deux polygones ABCDE et AB'CDE auront leurs côtés égaux chacun à chacun, et par conséquent proportionnels, et cependant leurs angles homologues ne sont pas tous égaux.

PROBLÈME.

354. *Construire sur une droite donnée A'B', homologue à AB, un triangle semblable au triangle donné ABC.* Fig. 146.

Les théorèmes des n.os 347, 351 et 352 peuvent également servir à résoudre le problème; mais le premier est celui qui fournit la solution la plus simple : car il suffit de faire aux points A' et B' des angles respectivement égaux aux angles A et B.

PROBLÈME.

355. *Construire sur une droite donnée ab, homologue à AB, un polygone semblable à un polygone donné ABCDE.* Fig. 178.

On peut employer à la résolution de ce problème la méthode du n.o 326, ou les conditions énoncées dans la scholie du n.o 336, ou encore les théorèmes des n.os 340 et 342. C'est du premier de ceux-ci que nous allons faire usage.

On commencera par partager le polygone donné en triangles par des diagonales issues d'un même sommet, si la chose est possible; sinon, on le décomposera en polygones qui jouissent de cette propriété, ce qui ramènera ce second cas au premier. Soit donc ABCDE le polygone proposé décomposé en triangles par les diagonales BD et BE. On construira sur *a b* un triangle semblable à ABE, en faisant les angles *e a b* et *a b e* respectivement égaux aux angles EAB et ABE. Alors, pour que les triangles soient semblablement placés dans les deux polygones, il faudra que les angles dont les sommets seront en *b* et en *e* soient respectivement homologues de EBD et de BED. On construira donc sur *be* un triangle semblable à BED, qui satisfasse à cette condition, et l'on continuera ainsi de suite.

Si $ab = AB$, le nouveau polygone sera égal au polygone donné. Voilà donc un nouveau moyen de construire un polygone égal à un autre (266 et 267).

356. Scholie. Il aurait suffi, pour résoudre le problème du n.o 344, de chercher une quatrième proportionnelle aux périmètres des deux polygones et à l'un des côtés AB du polygone donné, ce qui aurait fait connaître le côté homologue de AB, et d'achever ensuite la construction comme tout-à-l'heure.

PROBLÈME.

357. *Construire une échelle.*

Une échelle est une ligne droite divisée en parties égales, et l'une de ces parties est ensuite divisée aussi en un certain nombre de parties égales.

Les échelles sont nécessaires pour représenter sur le papier, et dans leur juste proportion, des distances plus grandes que les dimensions de la feuille de papier. Le géographe, l'architecte, le constructeur de machines, placent toujours au bas de leurs dessins une échelle de parties égales qui sert de commune mesure à toutes les distances du pays, à toutes les parties du bâtiment ou de la machine qu'ils y ont représentées.

Dans les cartes de géographie l'échelle représente ordinairement des myriamètres et des kilomètres; des décamètres subdivisés en mètres dans les plans topographiques; et enfin des mètres subdivisés en décimètres, en centimètres, et même en millimètres, dans le dessin linéaire.

Dans les plans du cadastre on représente une distance de 2,500 mètres par une ligne d'un mètre : de sorte que 100^{m} le sont par une ligne de $\frac{1}{25}^{m} = 0^{m}, 04$: ainsi il faut diviser en cent parties égales une ligne de quatre centimètres pour pouvoir représenter des mètres. On sent combien le procédé que nous avons indiqué (282) serait fécond en erreurs dans le cas actuel, et d'ailleurs les points de division seraient tellement rapprochés qu'il serait difficile de les distinguer. On a heureusement imaginé un procédé connu sous le nom de *méthode des transversales*, qui est aussi simple qu'exact. Nous allons l'appliquer à la construction d'une échelle de 500^{m} à $\frac{1}{2500}$, dont la plus petite division exprimera un mètre.

Fig. 181. Cent mètres étant représentés par une longueur de 4 centimètres, l'échelle de 500^{m} aura deux décimètres. On divisera donc une droite AB ayant cette longueur en cinq parties égales. On élèvera à ses deux extrémités deux perpendiculaires indéfinies AC et BD, sur chacune desquelles on portera dix fois une même ouverture de compas. On joindra les points correspondans de ces perpendiculaires deux à deux, et l'on reportera sur CD les divisions de AB, en numérotant ces divisions 0, 100, 200, 300

et 400, et 1, 2, 3, 4. . . . . 9, celles de la droite FE. Cela fait, on tire AE; et il est facile de voir, en comparant des triangles équiangles dont le sommet commun est en A, que la partie de chaque parallèle comprise entre la transversale AE et la droite AC vaut autant de dixièmes de EC qu'il est marqué par celui des numéros de EF qui répond à cette parallèle (*a*) : de sorte qu'en reportant sur AF et CE toutes ces parties de parallèles, chacune de ces deux droites sera divisée en dix parties égales, dont chacune sera $\frac{1}{10}$ de AB, et représentera ainsi 10 mètres. On placera aux divisions de FA les n.os 10, 20, 30. . . . 90, et il n'y aura plus qu'à joindre les points de division de AF avec ceux de CE par des transversales, et l'échelle sera construite : car la partie de chaque parallèle comprise entre la transversale GF et EF vaut autant de dixièmes de GE que l'indique le numéro de EF qui se trouve sur cette parallèle. Ainsi la partie qui correspond au n.° 3 vaut $\frac{3}{10}$ de GE ou de 10 mètres, c'est-à-dire 3 mètres. Cela posé, si l'on veut figurer sur le plan une distance de 347 mètres, on placera une des pointes d'un compas sur la 7.e parallèle à partir de la perpendiculaire numérotée 300, et l'on amènera l'autre pointe à l'intersection de cette parallèle avec la transversale numérotée 40.

Veut-on connaître, au contraire, la longueur d'une droite PQ, on portera sur l'échelle, à partir de la ligne 00, une ouverture de compas égale à cette ligne, ce qui fera connaître cette longueur à moins de cent mètres près. Supposons que PQ soit compris entre 200m et 300m, on fera glisser le compas sur les parallèles successives jusqu'à ce que l'une des pointes étant sur la ligne 200 — 200, l'autre se trouve sur une des transversales. Si cette transversale est numérotée 30, par exemple, et que l'on soit sur la quatrième parallèle, on en conclura que la ligne PQ vaut 234 mètres.

Si les lignes que l'on doit tracer sur le plan ne dépassent pas 800m, on pourra employer l'échelle d'un millième, c'est-à-dire représenter *un mètre* par *un millimètre* : car 800m le seront alors par une longueur de 8 décimètres, et le papier grand-

---

(*a*) Par exemple, les triangles ECA et AKI donnent la proportion AC : AK :: EC : KI ; mais AK est les six dixièmes de AC : donc KI est aussi les six dixièmes de EC.

aigle a 0^m,975 de largeur. Les règles de *Kutsch* fourniront alors d'excellentes échelles.

PROBLÈME.

358. *Par un point* C *donné sur le terrain, mener une parallèle à une droite* AB.

Il peut se présenter deux cas, selon que la droite AB sera accessible ou qu'elle ne le sera pas.

Fig. 182. *Premier cas.* Faites planter un jalon au point C, et un autre quelque part en A sur AB; puis, plaçant le graphomètre en B, de manière que son centre réponde verticalement à la droite AB, pointez les deux alidades sur les jalons A et C, et notez l'angle qu'elles forment; transportez ensuite le graphomètre en C, dirigez l'alidade fixe sur un jalon placé en B, et faites tourner l'autre jusqu'à ce qu'elle fasse un angle égal à celui que vous avez mesuré. Un jalon D planté dans sa direction déterminera la parallèle (87).

On résoudrait également bien le problème en s'appuyant sur la propriété des angles correspondans, ou à l'aide de l'équerre d'arpenteur.

Mais si l'on n'a pas à sa disposition d'autres instrumens que des jalons, on pourra encore tracer la parallèle demandée par la méthode suivante, fondée sur la réciproque de la propriété du trapèze énoncée au n.° 291.

Fig. 183. Prenez sur la droite donnée deux distances AB et BD égales entr'elles, et plantez des jalons aux quatre points A, B, D, C, un cinquième, F, sur le prolongement de AC. Faites placer un nouveau jalon O à l'intersection de DC et de BF, et un dernier à l'intersection G de AO et de DF. La droite CG sera la parallèle demandée.

Fig. 184. *Deuxième cas.* Je plante deux jalons sur AB, un troisième en C, et un quatrième en D dans l'alignement AC. Cela fait, on mènera par le milieu F de CD (on aura ce milieu en mesurant CD), la droite quelconque GFI; et, en prenant FI = GF, *la droite* IC *sera parallèle à* DB (*a*); on plantera ensuite un jalon K à l'intersection de AI et de BD, on prendra IL = KD, et l'on aura

(*a*) Ce nouveau moyen de mener, par un point donné, une parallèle à une droite accessible par une seulement de ses extrémités, est remarquable par sa simplicité.

ainsi une parallèle DL à AI (228), dont l'intersection O avec BI déterminera la droite demandée CO. Il suffit, pour le démontrer, de faire voir que cette droite coupe AK et BK en parties proportionnelles aux points M et N.

La similitude des triangles KMN, ICM, donne la proportion

KM : KN :: MI : CI.

La droite MO, menée par le sommet commun C des triangles semblables ICA, DCL, coupe les côtés IA et DL en parties proportionnelles, de sorte que

AM : MI :: DO : OL.

On tire de même des deux triangles DOB, IOL :

DN : BN :: CL : CI.

Mais, les deux triangles ODN et COL étant équiangles, on a aussi :

OD : DN :: OL : CL.

Multipliant ces trois dernières proportions par ordre, et supprimant les facteurs communs aux moyens et aux extrêmes, on aura :

AM : MI . BN :: 1 : CI,

ou AM : BN :: MI : CI.

Donc

AM : BN :: KM : KN,

ce qu'il fallait démontrer.

Nous donnerons, au n.° 361, une seconde solution de ce problème.

PROBLÈME.

359. *Mesurer une droite que l'on ne peut parcourir.*

Il peut se présenter trois cas, selon que les deux extrémités de la distance demandée AB sont accessibles, que l'une seulement, B, est accessible, ou qu'aucune ne l'est.

Premier cas. Plantez quelque part un jalon C, et mesurez les distances CA et CB. Supposons, par exemple, qu'elles vaillent, l'une 150^m, et l'autre 180^m : on prendra sur CA et CB deux points A' et B', qui les divisent en parties proportionnelles, par exemple, dans le rapport de 1 à 2, de sorte que $CA' = 75^m$, et $CB' = 90^m$. La droite A'B' sera ainsi parallèle à AB (nouveau moyen de mener par un point donné une parallèle à une droite donnée) : donc (286) Fig. 185.

CA′ : CA :: A′B′ : AB.

Donc, si l'on a mesuré A′B′, cette proportion fera connaître AB. Ainsi, dans notre exemple, AB sera le double de A′B′.

Fig. 186. *Deuxième cas.* Plantez un jalon B′ dans la direction de BA, et tracez par ce point une parallèle à une droite quelconque CB menée par le point B. Cela fait, plantez un jalon C à l'intersection de C′A avec CB; puis mesurez CB, BB′ et B′C′. Les triangles équiangles ACB et AC′B′ donneront :

C′B′ : CB :: AB′ : AB ;

d'où, *dividendo*,

C′B′—CB : CB :: BB′ : AB,

proportion qui fera connaître *la distance du point* B *au point inaccessible* A.

Fig. 187. *Troisième cas.* Dans les alignemens CA et CB, faites planter deux jalons D et F, et un troisième en I, au point de section de BD et de AF. Mesurez les cinq distances CD, CI, CF, ID et IF; et supposons que l'on ait trouvé respectivement $24^{m},75$; $36^{m},42$; $32^{m},4$; $21^{m},36$ et $12^{m},8$. On prendra pour échelle le double décimètre de Kutsch, en convenant de représenter un mètre par un centimètre. Nous construirons alors un premier triangle *cdi*, dont les côtés vaudront respectivement $247^{m.m},5$; $364^{m.m},2$ et $213^{m.m},6$; puis un second *cfi*, dont les côtés *cf* et *if* seront de $324^{m.m}$ et de $128^{m.m}$. Cela fait, on prolongera *cd* et *if* jusqu'à leur point de concours *a*, *id* et *cf* jusqu'à leur point d'intersection *b*; et il n'y aura plus qu'à porter sur l'échelle une ouverture de compas égale à *ab*. Comme on trouvera qu'elle contient $636^{m.m}$, on en conclura que AB = $63^{m},6$.

En effet, les triangles CDI, *cdi*, et CIF, *cif*, sont semblables (351), et par conséquent équiangles : donc les triangles AIC et *aic*, BIC et *bic*, sont semblables (347); donc les quadrilatères AIBC et *aibc* le sont aussi (340); dont leurs diagonales homologues sont proportionnelles (334); ainsi

CI : *ci* :: AB : *ab*.

Mais *ci* contient autant de centimètres que CI contient de mètres : donc AB vaudra autant de mètres qu'il y a de centimètres dans *ab*.

360. Si l'on a un graphomètre, on mesurera sur le terrain
Fig. 188. une *base* quelconque CD, et l'on relèvera les angles formés par les rayons visuels menés de ses extrémités aux points A et B; et,

de plus, l'angle ACB : alors on pourra, sur une droite *cd* qui contiendra autant de parties de l'échelle que l'on aura trouvé d'unités linéaires dans CD, construire des triangles *acd* et *bcd* semblables à ACD et à BCD; puis, en faisant avec *ac* un angle *acb'* égal à ACB (*cb'* coïncidera avec *cb* si les quatre points A B, C et D sont dans le même plan), rabattant *cb* sur *cb'*, et joignant *ab'*, on formera un triangle *acb'* semblable à ACB (352). Donc, en portant *ab'* sur l'échelle, on saura combien AB contient d'unités linéaires.

En prenant A, C et D en ligne droite, on aurait deux angles de moins à mesurer.

Remarquons que si l'une des extrémités B de la droite était accessible, le travail serait réduit de moitié : car, en prenant le point B pour l'une des extrémités de la base, on n'aurait à mesurer que les angles formés par cette base avec les rayons visuels menés de ses extrémités au point A.

Le problème que nous venons de résoudre fournit les moyens de mesurer la largeur d'un étang, d'un bois, d'une rivière, la distance de deux clochers, etc., et même celle du soleil ou d'une planète à la terre.

Supposons, en effet, deux observateurs placés en A et en B sur un même méridien et à une grande distance l'un de l'autre, et qu'à l'instant où le soleil et une même étoile E traversent le plan de ce cercle, chacun mesure l'angle formé par les rayons visuels menés de son œil à l'étoile et au centre S du soleil. A cause de l'immense éloignement des étoiles à la terre, les deux rayons visuels AE et BE seront parallèles : d'où il est facile de conclure que l'angle ASB sera égal à la différence ou à la somme des angles observés EAS et EBS, suivant que l'étoile paraîtra aux observateurs du même côté du soleil ou de côtés différens. Or, quand l'angle ASB est connu, on peut trouver, par le calcul, la *parallaxe horizontale* du soleil, c'est-à-dire l'angle AS'T sous lequel on verrait, du centre S' du soleil, le rayon TA, qui répond à l'un A des deux observateurs lorsque ce centre est dans l'horizon AH de ce point. Cette parallaxe est de 8'',6. Si du point S' comme centre, et avec l'unité linéaire pour rayon, on décrit l'arc MT' entre les côtés de l'angle AS'T, cet arc vaudra 8'',6, de sorte qu'il différera extrêmement peu de la perpendiculaire A'T'. Ainsi l'on pourra prendre cet arc pour la valeur de cette perpendiculaire, et l'on trouvera ainsi qu'elle Fig. 189.

est égale à $\frac{1}{23984}$ (a). Mais la similitude des triangles rectangles S'AT et S'A'T' donne la proportion

$$A'T' \text{ ou } \frac{1}{23984} : S'T' \text{ ou } 1 :: AT : S'T :$$

d'où l'on conclut que la distance du soleil à la terre est égale à 23984 rayons terrestres; et, comme le rayon correspondant au parallèle moyen est de 1591,6 lieues, il en résulte que cette distance est de 38172934 lieues.

Fig. 188. 361. Corollaire. On déduit du n.° 360 le moyen de mener une parallèle à AB par un point donné C : car la construction précédente fera connaître l'angle $abc = ABC$, et il n'y aura qu'à faire au point C un angle BCF égal à cet angle *abc* (87).

PROBLÈME.

362. *Mesurer la hauteur d'un édifice.*

Il peut se présenter deux cas, selon que le pied de l'édifice est accessible ou qu'il ne l'est pas.

Fig. 190. *Premier cas.* Plantez verticalement deux jalons CD et FG, qui soient alignés avec la verticale passant par le sommet de l'édifice; puis marquez sur le second le point F, où il est rasé par le rayon visuel qui va du point D au point B. Supposez alors que l'on ait pris sur FG une distance $OG = CD$, et imaginez la droite DOI. Les deux triangles BID et FOD seront semblables, et l'on aura la proportion

$$BI : ID :: FO : OD ;$$

or ID est égal à la droite AC; OD l'est à CG; et, comme on a pu mesurer AC, GC et FG, il n'y a que BI d'inconnue dans la proportion : car $FO = FG - CD$. Donc on pourra calculer BI; et, en y ajoutant IA, c'est-à-dire CD, la hauteur AB de l'édifice sera connue.

Si vous êtes muni d'un graphomètre, vous pourrez mesurer, à partir du pied de la verticale BA, une base arbitraire AC, à peu près égale à la hauteur de l'édifice; puis, disposant l'instrument

---

(a) Dans un même cercle les longueurs de deux arcs sont évidemment proportionnelles aux nombres de secondes qu'ils contiennent. Puis donc que la longueur d'un arc de 648000'', c'est-à-dire de la demi-circonférence du cercle qui a pour rayon l'unité, est $\frac{355}{113}$, comme nous le verrons plus tard (405), on obtiendra la longueur de l'arc de 8'',6 par la proportion

$$648000 : 8{,}6 :: \frac{355}{113} : x = \frac{1}{23984}.$$

de manière que son plan passe par la verticale AB, et que son diamètre fixe soit horizontal (un fil à plomb suspendu au centre du graphomètre devra alors raser le limbe du cercle, et répondre à 90°); vous pointerez l'alidade mobile sur le point B, et vous lirez alors sur le limbe la valeur de l'angle opposé par le *sommet* à BDI. Vous connaîtrez ainsi dans le triangle rectangle BID un côté et un angle; de sorte que vous pourrez construire sur le papier un triangle semblable à celui-ci, ce qui vous donnera la valeur de BI; et en y ajoutant la hauteur de l'instrument, le problème sera résolu.

Deuxième cas. Plantez trois jalons CD, C'D', FG, qui soient alignés avec la verticale qui passe par le sommet B de l'édifice, et tels que C'D' = CD. Des points D et D', dirigez successivement deux rayons visuels au point B, et marquez les points F et F' où ils rasent le jalon FG. Cela fait, mesurez FO, F'O, GC' et GC: vous connaîtrez ainsi DD', différence des deux dernières droites. Soient FO $= a$, F'O $= a'$, GC $= b$, GC' $= b'$ et DD' $= c$. Si vous concevez une ligne droite par les points D et D', les triangles semblables BID et FOD, BID' et F'OD', vous donneront les proportions

$$BI : ID :: FO : OD,$$
$$ID' : BI :: OD' : OF';$$

ou, en substituant aux lignes leurs longueurs, et représentant celle de BI par x:

$$x : ID :: a : b,$$
$$ID' : x :: b' : a' \ldots\ldots\ldots (1);$$

d'où, en multipliant par ordre, et supprimant le facteur x, commun aux deux termes du premier rapport de la proportion produit,

$$ID' : ID :: a \cdot b' : b \cdot a';$$

or $ID - ID' = DD' = c$: donc, *dividendo*,

$$c : ID' :: b \cdot a' - a \cdot b' : a \cdot b'.$$

Multipliant cette proportion, terme à terme, avec la poportion (1), et supprimant les facteurs communs ID' et b', il viendra:

$$c : x :: b \cdot a' - a \cdot b' : a \cdot a';$$

d'où l'on tirera la valeur de x:

$$x = \frac{a \cdot a' \cdot c}{b \cdot a' - a \cdot b'}.$$

Ajoutant IA ou son égale CD à la valeur trouvée pour x, on aura la hauteur demandée.

Si l'on veut faire usage du graphomètre, on mesurera sur le
Fig. 191. terrain une base CD, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir le sommet de l'édifice; plaçant ensuite le graphomètre au point C, et plantant un jalon en D, on relèvera l'angle BEF; puis, sans déranger le pied de l'instrument, on mesurera l'angle formé par le rayon visuel BE avec l'horizontale EG; on transportera ensuite le graphomètre au point D pour y observer l'angle BFE. Alors on pourra rapporter le triangle BEF sur le papier, faire ensuite au point e un angle beg égal à BEG, puis abaisser de b sur eg une perpendiculaire bg : il n'y aura plus qu'à ajouter à la longueur de cette perpendiculaire la hauteur du pied du graphomètre pour avoir l'élévation du point B au dessus du niveau de l'observateur.

PROBLÈME.

363. *Prolonger une droite* AB *au delà d'un obstacle* H.

Fig. 192. *Première solution.* Si la droite est accessible par une de ses extrémités, on lui élèvera une perpendiculaire AC, que l'on mesurera; on élèvera en C une perpendiculaire CD sur AC, et par un point quelconque D de CD on mènera une droite DE égale et parallèle à AC. Le point E sera sur le prolongement de AB (94).

Deuxième solution. Si l'on n'a pas d'autre instrument qu'une
Fig. 193. chaîne métrique et des jalons, on choisira un point C duquel on puisse aller aux deux points A et B, et l'on mesurera AC et BC; puis, par un point quelconque D de AC, par exemple, on mènera à CB une parallèle DE, dont on déterminera la longueur par la proportion

$$AC : AD :: CB : DE.$$

Prenant donc sur la direction de DE une distance égale à la longueur trouvée, on aura un point E de AB.

Fig. 194. *Troisième solution.* Par un point quelconque C menons une parallèle CD à AB; puis plantons un jalon quelque part en D sur cette parallèle, un second O dans l'alignement AC, un troisième I à l'intersection de AD et de la droite qui joindrait O avec le milieu M de CD. Le point E de concours de CI et de OD sera sur le prolongement de AB (291). *Cette construction n'exige point que la droite* AB *soit accessible.*

CHAPITRE IV.

DES POLYGONES RÉGULIERS.

364. Si l'on suppose qu'après avoir divisé une circonférence en parties égales, on joigne chaque point de division avec le suivant, on formera ainsi un polygone dont tous les côtés seront égaux ainsi que les angles (119 et 143). Un pareil polygone est dit *régulier*. Ainsi *on appelle polygone régulier celui qui est à la fois équiangle et équilatéral.* Le triangle équilatéral et le carré sont donc des polygones réguliers. On voit qu'il y a des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés, et que ces polygones sont nécessairement convexes.

365. Le problème que l'on se propose dans les travaux de pavage ou de marqueterie, consiste à couvrir un certain espace avec des figures rectilignes; et il est susceptible d'une infinité de solutions si l'on veut employer des polygones quelconques : car on n'a qu'une seule condition à remplir, savoir, que la somme de tous les angles qu'on réunira autour d'un même point fasse quatre droits. Mais la question se limite beaucoup si l'on ne doit se servir que de polygones réguliers, et tous d'un même nombre de côtés. Il faut, en effet, que le polygone que l'on a choisi soit tel qu'en répétant un de ses angles un certain nombre de fois, on trouve quatre droits, ou, en d'autres termes, que le quotient de quatre droits par l'angle du polygone soit un nombre entier. Or on obtient la valeur de l'angle d'un polygone régulier, en divisant la somme de ses angles (256) par le nombre de ses côtés : on trouvera ainsi, en prenant l'angle droit pour unité, que les angles des polygones de

	3,	4,	5,	6 côtés,
valent respectivement	$\frac{2}{3}$,	1,	$\frac{6}{5}$,	$\frac{4}{3}$;
et, comme	$4:\frac{2}{3}=6$,	$4:1=4$,	$4:\frac{6}{5}=\frac{10}{3}$,	$4:\frac{4}{3}=3$,

on voit que l'on pourra employer les polygones réguliers de 3, 4 et 6 côtés, mais qu'il faudra rejeter le pentagone et tous les polygones qui ont plus de *six* côtés : car, leurs angles étant plus grands que celui de l'hexagone, puisqu'ils interceptent entre leurs côtés des

arcs de plus en plus grands, le quotient de quatre droits par l'un de ces angles sera nécessairement plus petit que 3, et d'ailleurs il est évidemment plus grand que *deux* (*a*). On pourra donc se servir de *six* triangles équilatéraux, ou de *quatre* carrés, ou de *trois* hexagones. Tels sont les seuls polygones réguliers que l'on puisse employer *seuls* dans le pavage et dans la marqueterie (*b*); encore est-il bien rare que l'on fasse usage du triangle équilatéral. Cela tient à une raison que l'on ne doit jamais négliger, celle de la solidité de l'ouvrage. On conçoit, en effet, que plus il y a d'angles réunis autour d'un même point, plus la pression exercée en ce point par le pied ou tout autre corps pesant, sera puissante pour détruire la contexture de l'ouvrage. C'est encore pour cela que, quand on emploie des carrés, on les range par files rectilignes, de manière que les joints des carrés d'une file répondent aux milieux des carrés de la file suivante.

On se sert quelquefois de carreaux de deux couleurs, avec lesquels on forme des dessins plus ou moins agréables. Dans ce cas on ne s'assujettit pas à employer uniquement des polygones réguliers du même nombre de côtés; on fait même usage de triangles isocèles et de losanges, mais de manière toutefois que de la réunion de plusieurs résulte un polygone régulier : ainsi l'on peut composer un octogone régulier avec quatre triangles isocèles,
Fig. 195. quatre losanges et un carré.

(*a*) Soit n le nombre des côtés d'un polygone régulier : l'expression de la valeur d'un de ses angles sera $\frac{2(n-2)}{n}=2-\frac{4}{n}$. Or, à mesure que n augmente, la fraction $\frac{4}{n}$ diminue, et par conséquent la différence $2-\frac{4}{n}$ se rapproche davantage de 2, et l'on peut même donner à n une valeur assez grande pour que cette différence soit aussi petite que l'on voudra. Deux droits sont donc une *limite* dont l'angle d'un polygone régulier s'approche d'autant plus que le nombre des côtés de ce polygone est plus grand, et qu'il ne pourrait atteindre que si le nombre de ces côtés était *infini*.

(*b*) Soit n le nombre des côtés du polygone, et x le nombre des polygones qu'il faut employer. On aura pour expression d'un de leurs angles $\frac{2(n-2)}{n}$: donc $\frac{2(n-2)}{n}x=4$; d'où $x=2+\frac{4}{n-2}$: il faut donc que 4 soit divisible par $n-2$; ainsi $n-2$ ne peut avoir que les trois valeurs 1, 2, 4, et partant $n=3$, ou 4, ou 6; les valeurs correspondantes de x sont 6, 4, 3, ce qui s'accorde avec ce que nous venons de dire.

THÉORÈME.

366. *Tout polygone régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible à la circonférence.*

Soit ABCDEF un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés. On pourra toujours faire passer une circonférence par trois sommets consécutifs A, B, C (99), et je dis qu'elle passera nécessairement par le sommet suivant D. Joignons, en effet, le centre O avec les sommets A, B, C, D. Les deux triangles ABO, BCO, seront équilatéraux entre eux, et par conséquent égaux: donc l'angle ABO = OBC (208); ainsi chacun d'eux est la moitié de ABC. Mais le triangle BCO est isocèle : donc l'angle BCO est égal à OBC (196); il est donc la moitié de ABC, et partant de son égal BCD; donc l'angle OCD est l'autre moitié de celui-ci, et les triangles BCO, OCD, ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux; donc OD = OB; donc la circonférence qui passe par les trois sommets consécutifs A, B, C, passera aussi par le sommet suivant D. Mais on prouvera, par un raisonnement semblable, que, puisqu'elle passe par les trois sommets B, C, D, elle passera par le sommet suivant E, et ainsi de suite : donc, enfin, tous les sommets du polygone se trouvent sur la circonférence que nous avons décrite par les trois sommets A, B, C; donc le polygone est inscrit dans cette circonférence. Fig. 196.

En second lieu, tous les côtés AB, BC, CD.... sont des cordes égales de la circonférence que nous venons de décrire: donc elles sont également éloignées du centre O (123); donc les perpendiculaires OK, OG..... abaissées de ce point sur ces côtés seront égales; et par conséquent la circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OG, touchera tous les côtés du polygone (114), chacun dans son milieu (102). Cette circonférence sera inscrite dans le polygone, ou le polygone sera circonscrit à la circonférence.

367. Scholie I. Cette démonstration s'appliquerait très-bien à une ligne *brisée régulière*, c'est-à-dire à une brisée formée de droites égales et également inclinées entre elles : ainsi *toute brisée régulière est à la fois inscriptible et circonscriptible à la circonférence.*

Remarquons qu'une brisée régulière serait une portion du périmètre d'un polygone régulier, si l'arc de la circonférence

circonscrite sous-tendu par un de ses côtés, était une partie aliquote de cette circonférence.

368. Scholie II. On appelle angle au centre d'un polygone régulier, l'angle AOB formé par les deux rayons menés du centre commun O des circonférences inscrite et circonscrite aux extrémités d'un même côté AB. Tous les angles au centre d'un polygone régulier sont égaux (125); et, comme leur somme est égale à quatre droits (56), on aura la valeur de chacun en divisant quatre droits par le nombre de ces angles ou par le nombre des côtés du polygone.

369. Désormais nous appellerons *rayon* et *apothême* d'un polygone régulier, les rayons respectifs des circonférences circonscrite et inscrite à ce polygone.

PROBLÈME.

370. *Un polygone régulier* ABCDEF *étant inscrit dans un cercle, on propose,* 1.° *de circonscrire à ce cercle un polygone régulier du même nombre de côtés;* 2.° *de calculer le côté du nouveau polygone en fonction de celui du premier, et du rayon de la circonférence.*

1.° *Première solution.* Du centre O abaissez OI perpendiculaire sur AB, et menez au point I une tangente qui soit terminée aux prolongemens des rayons OA et OB. Je dis d'abord que OA'=OB'; et, en effet, les triangles OIA' et OIB' ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun: car, le point I étant le milieu de l'arc AB, les angles A'OI et B'OI interceptent des arcs égaux entre leurs côtés; donc, si du point O comme centre, et avec le rayon OA', on décrit une circonférence, elle passera par le point B'. Tirez les rayons OCC', ODD'...., puis joignez B'C', C'D'.... Je dis que le polygone A'B'C'D'E'F' est régulier, et circonscrit à la circonférence OA. En effet, ses angles au centre étant précisément ceux du polygone ABCDEF, on voit que les arcs A'B', B'C', C'D'..... compris entre leurs côtés, sont égaux (126): donc tous les côtés A'B', B'C'... sont égaux (119), et les angles A', B', C'.... sont aussi égaux (143); donc le polygone est régulier. En second lieu, il est circonscrit: car tous ses côtés sont des cordes égales de la circonférence OA', et par conséquent également éloignées de son centre. Mais l'une d'elles A'B' est tangente à la circonférence OA: donc toutes les autres le sont aussi.

Seconde solution. A chaque sommet du polygone menons une tangente, et le problème sera résolu. En effet tous les angles A'AB, A'BA, B'BC..... sont égaux (146): donc tous les triangles A'AB, B'BC..... sont isocèles (196). Mais les côtés AB, BC..... sont égaux: donc tous ces triangles sont égaux (201); donc Fig. 197.

$$A'A = A'B = B'B = B'C = C'C = \text{etc.};$$

par conséquent

$$A'B' = B'C' = C'D' = \text{etc.}$$

D'ailleurs les angles A', B', C'..... sont égaux (202): donc le polygone A'B'C'D'E'F' est régulier. D'ailleurs il est circonscrit: donc il résout la première partie du problème.

2.° Représentons par R et par a les longueurs respectives du rayon et du côté AB du polygone inscrit, et par x celle du côté A'B' du polygone circonscrit. La similitude des triangles AKO, A'IO, donne la proportion Fig. 196.

$$OK : OI :: AK : A'I,$$

ou, en doublant les deux termes du second rapport, et remplaçant les lignes OI, AB et A'B' par leurs longueurs,

$$OK : R :: a : x.$$

Mais OK, étant la distance de la corde AB au centre, vaut, comme on l'a vu au n.° 313,

$$OK = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}:$$

donc, en substituant dans la proportion précédente, il viendra:

$$\frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2} : R :: a : x;$$

d'où l'on tire:

$$x = \frac{2R \cdot a}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \ldots\ldots (1).$$

Supposons $a = 3^{d.m}$, et $R = 4^{d.m}$, et cherchons la valeur de x *à moins d'un cinquième* de décimètre. On aura: $2R = 8^{d.m}$, et partant $x = \dfrac{8 \cdot 3}{\sqrt{64 - 9}} = \dfrac{24}{\sqrt{55}}$; or on peut regarder cette fraction comme la racine carrée de son carré, c'est-à-dire de $\frac{24^2}{55}$: donc il ne s'agira plus, pour résoudre la question, que

d'appliquer à la fraction $\frac{24^2}{55} = \frac{576}{55}$ la règle donnée au n.° 176 de l'Arithmétique, et l'on trouvera ainsi que $x = \frac{16}{5}{}^{\text{d.m}} = 3^{\text{d.m}},2$.

Remarquons que la valeur (1) de x est calculable par logarithmes: car la quantité $4\,R^2 - a^2$, étant la différence des carrés des quantités $2\,R$ et a, est, comme on le démontre dans l'algèbre, égale à la somme $(2\,R + a)$ de ces quantités multipliée par leur différence $(2\,R - a)$. On a donc :

$$x = \frac{2R \cdot a}{\sqrt{(2R+a)(2R-a)}};$$

et par conséquent (Arithmétique, n.os 241, 242 et 244)

$$L.\,x = L.\,2R + L.\,a - \frac{L.(2R+a) + L.(2R-a)}{2}.$$

371. Corollaire. Réciproquement, si l'on donnait le polygone circonscrit, et que l'on proposât d'inscrire au même cercle un polygone régulier inscrit du même nombre de côtés, on pourrait y parvenir en menant, du centre, des droites à tous les sommets du polygone circonscrit, et joignant ensuite deux à deux les points où ces droites couperaient la circonférence. On pourrait encore joindre les points de contact deux à deux, et le polygone
Fig. 197. ainsi formé serait régulier : car, chacun des côtés A'B', B'C'..... étant divisé en deux parties égales au point de contact, tous les triangles A'AB, B'BC...... sont égaux (199), et par conséquent les côtés AB, BC...... sont égaux : donc le polygone est régulier (364).

PROBLÈME.

372. *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, on propose, 1.° d'inscrire dans ce cercle un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés que lui; 2.° de calculer le côté du nouveau polygone en fonction du côté du premier, et du rayon de la circonférense.*

Fig. 196. 1.° Abaissez du centre O des rayons perpendiculaires sur tous les côtés du polygone donné, et joignez chaque point de division avec les extrémités du côté correspondant, et le problème sera résolu.

2.° Soient AB le côté du polygone inscrit, et OI perpendiculaire sur AB: AI sera donc le côté du polygone inscrit de deux fois plus de côtés. Désignons les longueurs de AB et de AI res-

ectivement par a et par y, et toujours par R celle du rayon. La corde $AI=y$ étant moyenne proportionnelle entre le diamètre $IQ=2R$ et sa projection IK sur ce diamètre, on aura :

$$y^2=2R\cdot IK.$$

Calculons donc IK. Or $IK=R-OK$; et, comme nous avons vu tout-à-l'heure (370, 2.°) que $OK=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$, nous aurons : $IK=R-\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$, ou, en réduisant l'entier R au même dénominateur que la fraction qui l'accompagne,

$$IK=\frac{2R-\sqrt{4R^2-a^2}}{2}.$$

Par conséquent

$$y^2=\frac{2R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}{2}=R(2R-\sqrt{4R^2-a^2}),$$

en effectuant la division du numérateur par deux. On aura donc enfin :

$$y=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}.$$

Supposons, par exemple, que $R=3^{d.m}$, et $a=2^{d.m}$, et cherchons la valeur de y *à moins d'*UN DIXIÈME près. On aura d'abord, en remplaçant, $y=\sqrt{3(6-\sqrt{32})}$. Maintenant, pour avoir l'approximation demandée, on devra multiplier la quantité $3(6-\sqrt{32})$, par 100 (Arithmétique, n.° 168), ce qui donnera $300(6-\sqrt{32})=1800-300\sqrt{32}=1{,}800-\sqrt{2880000}$: car, puisqu'on peut extraire la racine carrée d'un produit en extrayant la racine de chaque facteur et multipliant ces racines entre elles, on voit que $300\sqrt{32}=\sqrt{300^2\cdot 32}=\sqrt{2880000}$. La racine carrée de 2880000 est, *en plus*, et à moins d'une unité près, 1575. Je retranche ce nombre de 1800, et je trouve que la racine du plus grand carré contenu dans le reste 225 est 15. Telle est la racine carrée de la quantité $1800-\sqrt{2880000}$ à moins d'une unité : car le carré de 16, surpassant 225 au moins d'une unité, est par conséquent plus grand que $1800-\sqrt{2880000}$, tandis que celui de 15 est au contraire plus petit qu'elle ; donc,

enfin, la valeur demandée de y sera $\frac{15}{10}$ d.m $= 1$ d.m, 5 (a).

373. Scholie I. Dans le calcul de la valeur de y rien n'exprime que AB soit le côté d'un polygone régulier : ainsi la formule que nous venons de trouver résout ce problème plus général : *Etant donnés le rayon d'une circonférence et la corde d'un arc quelconque, trouver la corde de la moitié de cet arc.* Nous observerons seulement qu'il ne s'agit alors que de la corde de la moitié du plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde donnée a. S'il s'agissait de l'autre, la valeur de y serait alors

$$y = \sqrt{R(2R + \sqrt{4R^2 - a^2})}:$$

car y, qui représente ici AQ, est moyenne proportionnelle entre le diamètre IQ et sa projection KQ, et cette projection est égale à R + OK.

374. Scholie II. Si l'on veut circonscrire au cercle un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés que le polygone
Fig. 198. inscrit ABC, on mènera d'abord des tangentes à chaque sommet du polygone inscrit; puis on joindra les sommets A', B', C', du polygone circonscrit ainsi formé avec le centre; et aux points de section P, Q, R, avec la circonférence, on mènera des tangentes. Le nouveau polygone DEFGIK sera régulier (370, 2.e solution) : car les points de contact de tous ses côtés divisent la circonférence en parties égales.

375. Scholie III. Remarquons enfin que les contours de deux polygones réguliers inscrit et circonscrit sont respectivement moindre et plus grand que ceux des polygones inscrit et circonscrit de deux fois plus de côtés : car dans le premier cas chaque droite AB est moindre que la brisée APB, et dans le second chaque brisée AC'B est plus longue que la brisée ADEB.

(a) Les élèves qui connaissent la formule par laquelle on tâche, en algèbre, d'obtenir la racine carrée d'une quantité qui est en partie commensurable et en partie incommensurable du deuxième degré, au moyen de deux racines carrées indépendantes l'une de l'autre, trouveront, en appliquant cette formule au calcul de la valeur de y, que

$$y = \sqrt{\frac{R(R+a)}{2}} - \sqrt{\frac{R(R-a)}{2}},$$

équation dont chaque terme est calculable par logarithmes.

PROBLÈME.

376. *Inscrire un carré dans une circonférence.*

Tirez deux diamètres AC et BD qui se coupent à angles droits, Fig. 194.
et vous aurez ainsi partagé la circonférence en quatre parties *égales* : par conséquent le quadrilatère formé en joignant chaque point de division avec le suivant sera un carré (364).

377. Scholie. Si l'on veut calculer le côté du carré inscrit dans une circonférence dont le rayon est donné, on observera que ce côté AB est l'hypothénuse du triangle isocèle rectangle AOB, de sorte qu'on aura (302) :

$$AB = \sqrt{2R^2};$$

Mais la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines carrées de ces facteurs : donc

$$AB = R \cdot \sqrt{2}.$$

Donc *le côté du carré inscrit est égal au rayon multiplié par la racine carrée de deux.*

378. Corollaire I. Il suit de là que *le rapport du côté du carré inscrit au rayon, ou du côté d'un carré à sa diagonale*, car AB est la diagonale du carré construit sur AO, *est égal à la racine carrée de deux, de sorte que ce rapport est incommensurable* (Arith., n.° 160). C'est, au reste, ce que l'on trouve en cherchant la commune mesure des droites AB et AO (30).

En effet, si du point B comme centre, et avec AO pour rayon, on décrit une circonférence, on aura (294) :

$$AF : AO :: AO : AI.$$

Ainsi $AI < AO$: donc AB contient *une* fois AO, avec le *reste* AI.

Il faut donc chercher combien de fois AI est contenu dans AO, ou, ce qui revient au même, combien de fois AO est contenu dans AF : car la proportion ci-dessus exprime que le rapport $\frac{AO}{AI} = \frac{AF}{AO}$. Or $AF = 2AO + AI$: donc le rapport $\frac{AF}{AO}$, c'est-à-dire $\frac{AO}{AI} = 2 + \frac{AI}{AO}$; de sorte que nous voilà de nouveau ramenés à chercher combien de fois AI est contenu dans AO, d'où l'on voit que l'opération ne pourra jamais se terminer, et qu'ainsi

il n'y a pas de commune mesure entre le côté du carré inscrit et le rayon (*a*).

379. COROLLAIRE II. On voit encore que si le rayon du cercle était égal à l'unité linéaire, le côté du carré inscrit serait égal à la racine carrée de 2. Ainsi la géométrie fournit un procédé rigoureux pour obtenir *exactement* la grandeur de l'irrationnelle $\sqrt{2}$. Il en est de même de la racine carrée de tout nombre n qui n'est pas un carré parfait : car cette racine est une moyenne proportionnelle entre l'unité linéaire et la droite qui contiendrait n fois cette unité (Arith., n.° 213). Observons toutefois qu'il faudrait, pour cela, pouvoir tracer de *véritables* lignes sur une surface *véritablement* plane, de sorte que cette exactitude n'est qu'intellectuelle. Aussi, si, ayant exécuté, par exemple, l'inscription d'un carré dans un cercle décrit avec l'unité linéaire pour rayon, on porte son côté sur une échelle, on obtiendra une valeur de $\sqrt{2}$ bien moins approchée que celle fournie par le calcul.

PROBLÈME.

380. *Inscrire un hexagone régulier dans une circonférence.*

Fig. 200. Supposons le problème résolu, et soit AB le côté de l'hexagone régulier. Son angle au centre AOB sera le sixième de quatre droits (368), c'est-à-dire les $\frac{4}{6}$ ou les $\frac{2}{3}$ d'un seul : donc il restera pour la somme des deux autres angles A et B du triangle OAB (186), $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ d'angle droit. Mais ces angles sont égaux (196), puisque $AO=OB$: donc chacun d'eux vaudra $\frac{2}{3}$ d'un droit; donc le triangle AOB est équiangle, et par conséquent équilatéral (197). Ainsi le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon : de sorte que, pour inscrire ce polygone dans la circonférence, il suffira de porter le rayon six fois sur cette courbe, et de joindre chaque point de division avec le suivant.

(*a*) Si l'on développe ce rapport de AB à AO en fraction continue, on verra facilement qu'il est exprimé par la fraction périodique mixte

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}$$

qui est précisément le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue.

381. Corollaire. En joignant les sommets de l'hexagone régulier de deux en deux, on aura le triangle équilatéral inscrit. Si l'on veut calculer son côté, on observera que ABCD étant $\frac{3}{6}$ ou la moitié de la circonférence, le triangle ACD est rectangle en C, et qu'*ainsi* AD étant égal à 2R, et CD à R, on aura (305) :

$$AC = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2},$$

ou, enfin :

$$AC = R \cdot \sqrt{3}$$

Ainsi *le côté du triangle équilatéral inscrit est égal au rayon multiplié par la racine carrée de* 3 : d'où l'on voit que *la* racine carrée de *trois* est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont *le* rayon est l'unité linéaire.

PROBLÈME.

382. *Inscrire un décagone régulier dans une circonférence.*

Soit AB le côté du décagone régulier : l'angle O vaudra le dixième de quatre droits, ou les $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ d'un seul : donc il restera, pour la somme des deux autres angles A et B du triangle AOB, $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$. Mais ces angles sont égaux, puisque AO = OB : donc chacun d'eux vaudra $\frac{4}{5}$, et sera par conséquent double de l'angle O. Alors, si l'on partage l'angle O en deux parties égales par la droite AC, on formera deux triangles isocèles ACO et ABC : car d'abord l'angle CAO = O ; ainsi AC = CO. Ensuite l'angle ACB, extérieur au triangle ACO, est double de l'angle O (188), et est par conséquent égal à B : donc AC = AB ; donc le segment CO du rayon est égal au côté du décagone inscrit. Mais les triangles ABO et ABC sont équiangles, et ont ainsi leurs côtés homologues proportionnels : donc Fig. 201.

$$AO : AC :: AB : BC,$$

ou, ce qui revient au même,

$$BO : CO :: CO : BC.$$

On voit donc que le rayon BO est partagé, au point C, en moyenne et extrême raison (316), et que AB est égal au plus grand des deux segmens : donc, *pour inscrire un décagone régulier dans un cercle, on partagera le rayon en moyenne et extrême raison, et l'on portera le plus grand segment dix fois sur la circonférence.*

Exécutons cette construction. Pour cela je trace deux diamètres à angles droits AF et GK; du point G comme centre, avec le rayon de la circonférence, je décris deux arcs qui coupent cette circonférence en M et en N; je joins MN, et cette droite est perpendiculaire sur le milieu de GO (71); je tire IA, et du point I comme centre je décris l'arc OK; et la droite AK, égale au plus grand segment du rayon OA divisé en moyenne et extrême raison (316), est le côté du décagone inscrit. Si donc on veut calculer ce côté, il faudra trouver la valeur de AK. Or $AK = AI - IK$. Mais dans le triangle rectangle AIO nous connaissons les deux côtés de l'angle droit $OA = R$, et $OI = \frac{R}{2}$: donc

Fig. 202.

$$AI = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{R \cdot \sqrt{5}}{2}$$

D'ailleurs $IK = IO = \frac{R}{2}$: donc, enfin,

$$AK = \frac{R \cdot \sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R \cdot \sqrt{5} - R}{2};$$

et, comme on peut regarder $R \cdot \sqrt{5} - R$ comme le produit de R par $(\sqrt{5} - 1)$, on aura en définitive :

$$AK = \frac{R\,(\sqrt{5} - 1)}{2};$$

d'où l'on voit que, *pour calculer le côté du décagone régulier inscrit dans une circonférence dont le rayon est donné, il faut multiplier le rayon par l'excès de la racine carrée de 5 sur l'unité, et diviser le produit par 2.*

383. Corollaire I. Si l'on joint les sommets du décagone de deux en deux, on formera un pentagone régulier. La détermination de son côté est fondée sur le théorème suivant.

Le côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont ceux du décagone et de l'hexagone réguliers inscrits dans ce cercle.

Fig. 203. Soient, en effet, AC et CD deux côtés consécutifs du décagone régulier, et par conséquent AD le côté du pentagone. Abaissons du centre O une perpendiculaire sur AC, et joignons son point Q d'intersection avec AD au point C. Le triangle AQC sera iso-

cercle (69), et par conséquent l'angle $ACQ = CAQ$. Mais, puisque $CD = AC$, l'angle CDA est aussi égal à CAQ : donc $ACQ = CDA$. De plus l'angle A est commun aux deux triangles AQC et ACD : donc ces triangles sont équiangles, et leurs côtés homologues donnent la proportion

$$AQ : AC :: AC : AD;$$

d'où l'on tire :

$$\overline{AC}^2 = AQ \cdot AD.$$

L'angle AOD vaut $\frac{4}{5}$ d'angle droit (368) : donc il reste, pour la somme des deux autres angles du triangle AOD, $2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$. Mais ils sont égaux : donc chacun d'eux vaut $\frac{3}{5}$. Or l'angle QOD vaut évidemment $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$: donc il est égal à OAD ; et, comme l'angle D est d'ailleurs commun aux deux triangles OAD et QOD, on voit que ces deux triangles sont semblables : donc

$$DQ : DO :: DO : AD;$$

d'où l'on tire :

$$\overline{DO}^2 = DQ \cdot AD.$$

Ajoutant cette égalité à celle trouvée plus haut, il viendra :

$$\overline{AC}^2 + \overline{DO}^2 = AQ \cdot AD + DQ \cdot AD;$$

ou, en mettant AD en facteur commun des quantités qu'il multiplie, et observant que $AQ + DQ = AD$, on aura enfin :

$$\overline{AC}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{AD}^2.$$

Or DO est égal au côté de l'hexagone régulier inscrit : donc on peut construire un triangle rectangle dont l'hypothénuse soit le côté AD du pentagone régulier, et dont les deux autres côtés soient ceux AC et DO du décagone et de l'hexagone régulier (307, 3.°).

384. Il suit de là que si l'on a calculé le côté du décagone régulier, il n'y aura qu'à ajouter son carré à celui du rayon ; et, en extrayant la racine carrée de la somme, on aura le côté du pentagone.

Le carré du côté du décagone est égal à

$$\frac{R^2 \cdot (5 - 2\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{R^2 \cdot (6 - 2\sqrt{5})}{4};$$

donc

$$AD = \sqrt{R^2 + \frac{R^2 \cdot (6 - 2\sqrt{5})}{4}} = \sqrt{\frac{4R^2 + R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}}$$

Mettant R^2 en facteur commun des quantités qu'il multiplie, on aura :

$$AD = \sqrt{\frac{R^2 \cdot (10 - 2\sqrt{5})}{4}},$$

ou enfin

$$AD = \frac{R \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2},$$

formule au moyen de laquelle on pourra calculer le côté du pentagone régulier en fonction immédiate du rayon.

Fig. 201. 385. COROLLAIRE II. Si l'on porte le rayon de A en D sur la circonférence, l'arc AD sera $\frac{1}{6}$ de cette circonférence ; et, comme l'arc AB en est $\frac{1}{10}$, leur différence BD sera $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ de la circonférence : donc la corde de cet arc sera le côté du pentédécagone régulier inscrit ; ainsi il sera facile d'inscrire ce polygone.

386. En s'appuyant sur le problème du n.° 313, on pourra calculer le côté du pentédécagone régulier ; mais il faudra évaluer auparavant les apothêmes du décagone et de l'hexagone : car, ces apothêmes mesurant les distances respectives des côtés de ces polygones au centre (369), on trouvera (313) que l'apothême de l'hexagone est

$$\frac{R \cdot \sqrt{3}}{2},$$

et que celui du décagone est

$$\frac{R \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

On aura donc, d'après la règle 2.° du n.° 313,

$$BD = \frac{\frac{R^2 \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 1)}{4}}{R}$$

$$= \frac{R\{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)\}}{4}.$$

387. SCHOLIE. Nous savons maintenant inscrire dans la circonférence les polygones réguliers de 4, 6, 3, 10, 5 et 15 côtés ; mais nous avons vu que l'on peut toujours inscrire dans une circonférence un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés qu'un polygone régulier déja inscrit (372), et circonscrire à cette circonférence un polygone régulier d'autant de côtés

qu'un polygone régulier déja inscrit (370) : ainsi nous sommes actuellement en état d'inscrire et de circonscrire à une circonférence donnée tout polygone régulier dont le nombre des côtés est un terme de l'une des quatre progressions géométriques suivantes :

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : \text{etc.},$$
$$\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \text{etc.},$$
$$\div\ 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : \text{etc.},$$
$$\div\ 15 : 30 : 60 : 120 : 240 : 480 : \text{etc.},$$

et calculer, au moyen des formules des n.os 370 et 372, le côté de ce polygone. Mais ce sont là les seuls polygones réguliers que la géométrie élémentaire enseigne à inscrire et à circonscrire à la circonférence (*a*).

388. Nous ne saurons donc diviser la circonférence qu'en un nombre de parties marqué par l'un des termes des quatre progressions ci-dessus : car l'inscription d'un polygone régulier dans une circonférence revient à la division de cette circonférence en autant de parties égales qu'il doit avoir de côtés, et réciproquement. Dans tout autre cas il faut avoir recours au tâtonnement ou à des méthodes empiriques. Ainsi l'on a trouvé que le côté du polygone régulier de

7 côtés est $\frac{1}{2}$ du côté du triang. équil. ; l'erreur est $< \frac{2}{1000}$ du rayon.
9. . . . . . . $\frac{2}{5}$ . . . . $< \frac{1}{100}$
11. . . . . . . $\frac{2}{5}$ du côté du carré. . . . . $< \frac{3}{1000}$
13. . . . . . . $\frac{1}{3}$ . . . . $< \frac{1}{100}$
17. . . . . . . $\frac{3}{8}$ du rayon. . . . . $< \frac{1}{100}$
19. . . . . . . $\frac{1}{3}$ du rayon. . . . . $< \frac{1}{200}$
21. . . . . . . $\frac{1}{6}$ du côté du triangle équilatéral. . . . $< \frac{1}{100}$
23. . . . . . . $\frac{1}{5}$ du côté du carré. . . . . $< \frac{1}{100}$
25. . . . . . . $\frac{1}{4}$ du rayon. . . . . $< \frac{1}{1000}$
27. . . . . . . $\frac{1}{6}$ du côté du carré. . . . . $< \frac{1}{200}$
29. . . . . . . $\frac{1}{8}$ du côté du triangle équilatéral. . . . $< \frac{1}{300}$

(*a*) Nous observerons toutefois que l'on peut encore, *en n'employant que la règle et le compas*, inscrire à la circonférence tout polygone régulier dont le nombre des côtés est compris dans la formule $(2^n + 1)$, pourvu que ce nombre soit premier. Mais les opérations deviennent si compliquées, même pour le plus simple de ces polygones, qui est celui de 17 côtés (ceux de 3 et de 5 côtés appartiennent à nos quatre progressions), qu'il vaut bien mieux avoir recours au tâtonnement.

Il serait peut-être encore plus exact de calculer le côté du polygone à inscrire par la table des cordes. Si, par exemple, ce polygone devait avoir *onze* côtés, on verrait que l'arc sous-tendu par chaque côté vaudrait $\frac{360°}{11} = 32° 43'$, dont la corde est 56,33 dans l'hypothèse où le rayon égale 100 unités. Si donc le rayon du cercle donné a 4^m, on n'aura qu'à porter onze fois sur la circonférence une ouverture de compas égale à $4^m \cdot 0,5633 = 2^m,2532$.

389. De la division de la circonférence en 25 parties égales on déduira facilement le moyen de la partager en 400 : car il n'y aura pour cela qu'à diviser chacune de ces 25 parties en 16, ce qui est facile (104). Mais pour la diviser en 360 parties, il faudrait savoir partager un arc en trois parties égales, et la géométrie élémentaire est impuissante lorsque le nombre des parties de l'arc n'est pas une puissance pafaite de 2. Toutefois nous indiquerons la solution approchée que M. *Sarrus* a donnée du problème de la trisection de l'arc dans *les Annales de mathématiques*.

Fig. 204. Soit AB l'arc que l'on veut diviser en trois parties égales. Elevez au centre O la perpendiculaire indéfinie OS sur OA, et prolongez ce rayon d'une quantité OD, double de OA. Joignez BD, qui coupe OS en C, et la partie OC est un peu plus grande que la corde qui sous-tend les $\frac{2}{3}$ de l'arc AB; du point C comme centre, et avec une ouverture de compas égale à OD, décrivez un arc de cercle qui coupera AD en D'; joignez BD', et OC' sera une valeur de la corde dont il s'agit plus approchée que OC. Recommençant la même construction pour le point C', on déterminera OC'', valeur très-approchée de la corde qui sous-tend les $\frac{2}{3}$ de l'arc AB. Si l'approximation n'est pas encore assez grande, on réitérera la construction pour le point C'', et ainsi de suite; mais ordinairement trois opérations suffiront.

Si l'arc donné était plus grand qu'un quadran, on achèverait
Fig. 205. la demi-circonférence; on partagerait l'arc BA' en trois parties égales; et, portant le rayon de F en G sur la circonférence, l'arc BG sera $\frac{1}{3}$ de AB. En effet FG est le sixième de la circonférence, ou le tiers de l'arc ABA'. Mais $BF = \frac{A'B}{3}$: donc

$$BG = \frac{ABA'}{3} - \frac{A'B}{3} = \frac{AB}{3}.$$

Fig. 206. Enfin, si l'arc AB est un quadran, il suffira de porter le rayon

de A en K pour avoir le tiers BK de cet arc : car le rayon soustend $\frac{1}{6}$ de la circonférence, c'est-à-dire les $\frac{4}{6}$ ou les $\frac{2}{3}$ du quadran.

Maintenant, si l'on veut partager la circonférence en 360 parties égales, on commencera par la diviser en 15 (385), puis chaque quinzième en 8 parties, ce qui en fera 120 dans la circonférence, et il n'y aura plus qu'à partager chacune de ces dernières parties en trois.

390. La division de la circonférence en parties égales est une opération nécessaire dans la pratique d'un grand nombre d'arts. Ainsi le constructeur de machines ne peut exécuter les roues dentées, les pignons et les lanternes des engrenages, les cylindres cannelés que l'on emploie pour le filage mécanique du coton, de la laine, etc., sans diviser une circonférence en parties égales. Mais c'est surtout dans la fabrication des instrumens de mathématiques et d'astronomie que l'exactitude des divisions est indispensable. Aussi a-t-on inventé, pour diviser avec rigueur les limbes de ces instrumens, des machines fort ingénieuses, mais dont la description nous entraînerait trop loin.

THÉORÈME.

391. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs périmètres sont proportionnels aux rayons des cercles qui leur sont inscrits et circonscrits.*

1.° En effet tous les angles au centre des deux polygones sont égaux (368) : donc on pourra placer les deux polygones de manière que tous les angles au centre de l'un coïncident avec ceux de l'autre ; et, comme leurs côtés seront parallèles deux à deux (279), les deux polygones satisferont à la définition du n.° 324, et seront par conséquent semblables.

2.° Soient AB et A'B' les côtés de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés ; O et O' les centres des cercles inscrits et circonscrits à chacun d'eux ; OI et O'I', OA et O'A', les rayons de ces cercles. Les deux triangles OAI et O'A'I' sont équiangles : car, les angles au centre AOB et A'O'B' étant égaux, leurs moitiés AOI et A'O'I' le sont aussi ; de plus les angles I et I' sont droits. On aura donc la proportion Fig. 207.

$$AI : A'I' :: OI : O'I' :: OA : O'A' ;$$

ou, en doublant les deux termes du premier rapport,

AB : A'B' :: OI : O'I' :: OA : O'A' :

ce qui prouve que *les côtés de deux polygones réguliers semblables sont proportionnels à leurs rayons et à leurs apothêmes.* Mais ces côtés sont aussi proportionnels aux périmètres des deux polygones (343) : donc, enfin, les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont proportionnels à leurs rayons et à leurs apothêmes.

392. Corollaire. Si l'on proposait de construire sur une droite donnée AB un polygone régulier d'une espèce donnée, par exemple un pentédécagone, on commencerait par inscrire un pareil polygone dans une circonférence quelconque, et la question se trouverait ainsi ramenée au problème du n.° 355.

393. Si l'on inscrit dans une circonférence un polygone régulier quelconque, et ensuite une série de polygones réguliers, tels que chacun d'eux ait deux fois plus de côtés que le précédent, il est clair que l'on arrivera bientôt à un polygone dont les côtés seront si petits qu'ils se confondront sensiblement avec les arcs qu'ils sous-tendent. Si donc, au lieu de s'arrêter à un pareil polygone, on continue, par la pensée, de doubler le nombre des côtés; *on conçoit* que, quand leur nombre sera devenu infini, le polygone se confondra avec le cercle, de sorte que l'*on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits.* Ces côtés se nomment les *élémens* de la circonférence; et l'on voit, d'après la définition du n.° 107, que *la tangente à la circonférence en un point donné n'est autre chose que le prolongement indéfini de l'élément sur lequel ce point est situé* (a).

394. L'angle extérieur formé par deux élémens consécutifs, que l'on nomme *l'angle de contingence*, est infiniment petit : car nous avons vu, dans la note (a) du n.° 365, que l'angle d'un polygone régulier différait *infiniment peu* de deux droits quand le nombre des côtés de ce polygone était infini.

(a) Ce que nous venons de dire de la circonférence s'appliquerait évidemment à une courbe quelconque, de sorte que l'*on peut regarder toute courbe comme une brisée composée d'un nombre infini de côtés infiniment petits*, côtés que l'on nomme aussi les *élémens* de la courbe, et qu'ainsi *la tangente en un point d'une courbe n'est autre chose que le prolongement indéfini de l'élément sur lequel ce point est situé.*

395. Il suit de cette nouvelle manière d'envisager le cercle, qu'il doit jouir de toutes les propriétés des polygones réguliers qui sont indépendantes du nombre de leurs côtés, et que par conséquent *les circonférences de deux cercles sont proportionnelles à leurs rayons*. Mais, comme cette proposition est fort importante, nous allons l'établir sur des principes plus rigoureux que les considérations qui nous y ont conduit. Nous démontrerons en conséquence les deux lemmes suivans.

LEMME.

396. *Toute ligne qui enveloppe d'une extrémité à l'autre une ligne* CONVEXE *quelconque* AMB *est plus longue que celle-ci.* Fig. 208.

En effet, si la ligne AMB n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent, il existera parmi celles-ci une ligne ACDB plus courte que toutes les autres. Menez entre les deux lignes AMB et ACDB une droite quelconque FG, qui ne rencontre point AMB, ou qui, du moins, ne fasse que la toucher, ce qui est possible, puisque AMB est convexe. Or la droite FG est plus petite que FCDG : donc, en ajoutant de part et d'autre AF et GB, on aura : AFGB < ACDB; donc il était absurde de supposer que ACDB fût la plus courte de toutes les lignes qui enveloppent AMB; et, comme on pourrait répéter le même raisonnement sur toutes les lignes qui entourent AMB, on doit en conclure que AMB est effectivement moindre que toutes les lignes qui l'enveloppent.

397. SCHOLIE I. Remarquons que le théorème du n.° 42 n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

398. SCHOLIE II. Remarquons encore que le raisonnement précédent conviendrait également au cas où la ligne convexe AMB serait fermée, et que la ligne enveloppante aurait avec elle un ou plusieurs points communs, ou même aucun point commun.

LEMME.

399. *Deux circonférences concentriques étant données, on peut toujours inscrire dans la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite, et circonscrire à la plus petite un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus grande.*

Fig. 209. 1.º En un point quelconque C de la petite circonférence, menez-lui une tangente AB terminée à la grande. Cela fait, portez le rayon OA de A en K sur la grande circonférence. Si le point K tombe au dessus de B, la corde AK sera moindre que AB (119), et partant sera plus éloignée du centre que celle-ci (123) : donc l'hexagone régulier résoudra le problème. Si l'arc AK est plus grand que AMB, on le divisera en deux parties égales; puis chacune de ses moitiés aussi en deux parties égales, si elles surpassent AMB, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un arc moindre que AMB; ce qui arrivera nécessairement, puisque l'on peut concevoir la bissection des arcs poussée indéfiniment (a). La corde AD de ce dernier arc sera moindre que AB, et ne pourra point, par conséquent, rencontrer la petite circonférence. Ce sera donc le côté du polygone inscrit demandé.

2.º Cette première partie du problème étant résolue, on joindra le centre O avec les extrémités A et D du côté du polygone inscrit; on abaissera de ce centre une perpendiculaire OF sur ce côté; et, menant au point F' de la petite circonférence une tangente A'D' terminée à la rencontre de OA et de OD, A'D' sera le côté du polygone circonscrit demandé. Ce sera le côté d'un polygone régulier : car l'angle A'OD' est une partie aliquote de quatre droits, et l'on pourra d'ailleurs achever le polygone par la méthode du n.º 370. Il est évident qu'il ne rencontrera pas la grande circonférence. On peut dire en effet que la similitude des triangles OFA et OF'A' donne $OF : OF' :: OA : OA$. Mais $OF > OF'$: donc aussi $OA > OA'$.

Fig. 210. 400. Scholie. Si l'on a deux arcs concentriques AB et A'B' correspondant à un même angle au centre AOB, on pourra de même inscrire au plus grand une brisée régulière (367), qui ne rencontre pas le plus petit, et circonscrire à celui-ci une brisée régulière qui ne rencontre pas le plus grand. Il suffira, pour obtenir la première brisée, de diviser l'arc AB successivement en 2, 4, 8, 16.... parties égales, jusqu'à ce qu'on arrive à un arc moindre que l'arc DMF sous-tendu par la tangente menée

(a) En effet ces arcs successifs sont les termes d'une progression par quotient, dont la raison est $\frac{1}{2}$, et qui se prolonge indéfiniment : or nous avons démontré (Arith., 295) que le dernier terme d'une progression géométrique décroissante est d'autant plus petit qu'il est plus éloigné du premier, et qu'il a zéro pour limite lorsque la progression se prolonge indéfiniment.

à l'arc A'B' par son milieu. La seconde brisée s'obtiendra ensuite par la construction que nous avons donnée dans la seconde partie du numéro précédent.

THÉORÈME.

401. *Deux circonférences sont proportionnelles à leurs rayons* OA *et* O'A', c'est-à-dire que l'on aura la proposition (a) Fig. 211.

$$circ\ OA : circ\ O'A' :: OA : O'A'.$$

En effet, si cette proportion n'est pas vraie, et que l'on observe qu'il y a des circonférences de toutes les grandeurs, puisque, le rayon croissant d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, la circonférence croît aussi d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, on verra que l'on pourra toujours former une proportion dont les trois premiers termes soient OA, O'A' et *circ* OA, et dont le quatrième sera une circonférence plus grande ou plus petite que *circ* O'A'. Supposons que ce quatrième terme soit *circ* O'A'' < *circ* O'A' (396), de sorte que l'on ait :

$$OA : O'A' :: circ\ OA : circ\ O'A'' \ldots\ldots\ (1).$$

J'inscris dans la circonférence O'A' un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence O'A'', et j'inscris dans la circonférence OA un polygone semblable à celui-ci. Alors, si nous désignons par P et P' les périmètres des polygones inscrits aux deux circonférences OA et O'A', nous aurons la proportion (391)

$$OA : O'A' :: P : P' \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Cette proportion étant liée à la précédente par le rapport commun OA : O'A', on en conclut :

$$circ\ OA : circ\ O'A'' :: P : P' \ldots\ldots\ (3),$$

proportion absurde : car, le premier antécédent étant plus grand que le second, tandis que le premier conséquent est plus petit que le second, le produit des extrêmes surpasse celui des moyens. Mais cette proportion résulte des proportions (1) et (2); et, comme la vérité de celle-ci a été démontrée, il faut nécessairement que la proportion (1) soit fausse : donc son quatrième terme ne peut pas être moindre que *circ* O'A'. Mais on prouverait de

(a) Nous désignerons désormais, pour abréger, par *circ* R la circonférence dont le rayon est R.

la même manière qu'il ne saurait non plus la surpasser : on doit donc en conclure nécessairement qu'il est *circ* O'A', et qu'ainsi

OA : O'A' :: *circ* OA : *circ* O'A',

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que, pour lier la proportion hypothétique (1) avec celle qui résulte de l'application du principe du n.º 391, par un rapport commun, *il faut que les deux polygones soient tous deux inscrits ou tous deux circonscrits* aux circonférences proposées OA et O'A', et que, pour que la proportion (3) soit impossible, *le polygone* P' *doit être compris entre les deux circonférences* O'A' *et* O'A''.

402. Corollaire i. *Deux arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.*

Soient, en effet, BAC et B'A'C' les deux arcs, et O et O' les angles correspondans : il suit du théorème du n.º 131 que chacun de ces angles est à quatre droits comme l'arc compris entre ses côtés est à la circonférence dont il fait partie ; ainsi

O : 4 *droits* :: BAC : *circ* OB,
O' : 4 *droits* :: B'A'C' : *circ* O'B'.

Mais, comme les arcs BAC et B'A'C' sont semblables, les angles O et O' sont égaux (324 et 330) : donc ces deux proportions sont liées par un rapport commun, de sorte que l'on en tire :

BAC : *circ* OB :: B'A'C' : *circ* O'B',
ou BAC : B'A'C' :: *circ* OB : *circ* O'B' :: OB : O'B'.

403. Corollaire ii. *Les circonférences de deux cercles sont proportionnelles à leurs diamètres :* ainsi le rapport d'une circonférence quelconque à son diamètre est le même que celui de toute autre circonférence à son diamètre, et est par conséquent un nombre constant. Or le rapport de deux quantités est le quotient qu'on obtient en divisant la première par la seconde : donc,

Si l'on multiplie le rapport de la circonférence au diamètre *par le diamètre d'une circonférence, on aura la longueur de cette circonférence ;*

Et, *si l'on divise la longueur d'une circonférence par le rapport de la circonférence au diamètre, on aura celle de son diamètre.*

Nous conviendrons désormais de représenter le rapport de la

circonférence au diamètre par la lettre π; et alors, si l'on désigne par R la longueur du rayon d'une circonférence, nous exprimerons les deux règles précédentes par les formules

$$circ\,R = 2\,\pi.R, \quad \text{et } 2R = \frac{circ\ R}{\pi}$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de ce nombre π. La solution que nous allons donner de ce problème est fondée sur le théorème suivant.

THÉORÈME.

404. *On peut toujours inscrire et circonscrire à un cercle deux polygones réguliers semblables, tels que la différence de leurs périmètres soit moindre que toute grandeur donnée.*

Soient R le rayon de la circonférence donnée, P et p les périmètres de deux polygones réguliers semblables, circonscrit et inscrit à cette circonférence, et r l'apothême du second. On aura (391):

$$P : p :: R : r;$$

d'où, *dividendo*,

$$P - p : P :: R - r : R,$$

et par conséquent

$$P - p = \frac{P\,(R - r)}{R}.$$

Or, si l'on inscrit et circonscrit à la circonférence des polygones dont les côtés soient de deux en deux fois plus nombreux, les valeurs successives de P, quantité toujours plus grande que la circonférence (396), iront constamment en diminuant, tandis que celles de r, quantité toujours moindre que R, augmenteront continuellement : donc le produit $\frac{P\,(R-r)}{R}$, c'est-à-dire $P - p$, décroîtra sans cesse; de sorte que, si l'on peut prouver que le facteur $(R - r)$ peut être rendu moindre que toute grandeur donnée δ, il sera prouvé que la différence $P - p$ jouira aussi de la même propriété. Or, si l'on prend sur le rayon OI une distance $IK = \delta$, et que l'on mène la corde AB perpendiculaire à OI, on pourra toujours, en continuant de doubler le nombre des côtés des polygones, arriver à un polygone inscrit, tel que l'arc soustendu par son côté soit moindre que AIB : son apothême r sera donc plus grand que OK, et par conséquent la différence $R - r$ sera moindre que δ. Fig. 196.

PROBLÈME.

405. *Trouver le rapport de la circonférence au diamètre.*

Le rapport de la circonférence au diamètre étant le même pour toutes les circonférences possibles, nous considérerons celle dont le rayon est l'unité linéaire : son diamètre sera 2. Si donc nous pouvons calculer la longueur de cette circonférence, en en prenant la moitié, nous aurons résolu le problème. Ainsi la question est ramenée à calculer la longueur de la circonférence dont le rayon est l'unité linéaire.

Le théorème qui précède fournit le moyen de calculer cette longueur, sinon exactement, du moins avec tel degré d'approximation que l'on voudra : car, si l'on demande la valeur de π *à moins d'un millième près*, par exemple, on n'aura qu'à inscrire et à circonscrire à la circonférence dont le rayon est l'unité, deux polygones réguliers semblables, dont les périmètres différeront au plus de *quatre millièmes*. Mais notre circonférence sera comprise entre l'un de ces périmètres et leur *moyenne différentielle :* donc elle différera de cette moyenne de moins de deux millièmes; par conséquent, en prenant la moitié de cette moyenne, on aura le rapport de la circonférence au diamètre *à moins d'un millième près,* comme on le demande. Occupons-nous donc du calcul des périmètres de nos deux polygones.

On commencera par inscrire dans notre circonférence l'un des polygones réguliers que nous savons y inscrire; et, comme le côté de l'hexagone est égal au rayon, et par conséquent à 1 dans notre hypothèse, nous partirons de ce polygone. Nous pourrons ensuite, au moyen de la formule

$$x = \frac{2R \cdot a}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$$

du n.° 370, calculer le côté de l'hexagone régulier circonscrit, en y faisant $R = a = 1$. On trouvera ainsi pour valeur de ce côté :

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547.$$

Multipliant par 6 les valeurs des côtés de ces hexagones, on aura celles de leurs périmètres; mais, comme la différence de ces périmètres surpasse 0,004, on devra passer aux polygones de 12 côtés.

On obtiendra la valeur du côté du dodécagone inscrit, en faisant $R=a=1$, dans la formule du n.º 372 :

$$y=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}.$$

Puis on calculera le côté du dodécagone circonscrit, en faisant $R=1$, et a égal à la valeur trouvée pour y dans l'expression précédente de x. Multipliant enfin par 12 les côtés des deux dodécagones, on aura leurs périmètres; et si la différence de ces périmètres surpasse 0,004, on passera successivement aux polygones de 24, 48, 96, etc., côtés, jusqu'à ce que l'on arrive à deux polygones semblables, dont la différence des périmètres ne surpasse point quatre millièmes : il n'y aura plus alors qu'à additionner ces deux périmètres, et à prendre le quart de la somme. On a trouvé que les périmètres des polygones de 96 côtés étaient :

6,282
6,285

Somme..... 12,567 d'où... $\pi=3,141$.

Telle est donc la valeur du rapport de la circonférence au diamètre exacte à moins d'un millième. Or Legendre a démontré que non-seulement ce rapport, mais que son carré même était incommensurable : ainsi on ne peut l'obtenir qu'avec une approximation plus ou moins grande. Au moyen d'une méthode plus expéditive que la précédente, on a poussé le calcul de la valeur de π jusqu'à 154 décimales; et il est facile de voir qu'en employant cette valeur pour calculer la circonférence d'un cercle dont le rayon serait la distance moyenne de la terre au soleil, c'est-à-dire de plus de 38 millions de lieues de 2000 toises, l'erreur serait bien moindre que l'épaisseur d'un cheveu.

La valeur de π exacte à moins d'une demi-unité du dixième ordre décimal est

$$\pi=3,14159\,26536,$$

et elle a pour logarithme

$$L.\pi=0,49714\,98727.$$

En réduisant cette valeur de π en fraction continue, et formant ensuite les réduites, on a trouvé les deux valeurs suivantes de ce rapport :

$$\pi=\tfrac{22}{7}, \text{ et } \pi=\tfrac{355}{113}.$$

Le premier est dû à *Archimède*, et est exact à moins de *deux millièmes* près. Le second a été découvert par *Métius*, dont il a conservé le nom. Il n'est pas fautif *d'un demi-millionième :*

aussi est-il fréquemment employé. Il est d'ailleurs facile à retenir, en observant que, si l'on écrit deux fois chacun des trois premiers nombres impairs 1, 3, 5, de cette manière 113355, les deux moitiés de ce nombre 113 et 355, sont précisément les deux termes de ce rapport.

406. La géométrie élémentaire ne fournit pas de méthode pour *rectifier la circonférence*, c'est-à-dire pour trouver une ligne droite qui soit *rigoureusement* égale en longueur à une circonférence donnée. Aussi, pour résoudre ce problème, qui se présente souvent dans la pratique des arts, il faut avoir recours aux méthodes d'approximation. Si l'on veut faire usage du rapport d'Archimède, il n'y aura qu'à porter sur une ligne droite 22 fois la septième partie du diamètre, ce qui exige qu'on le divise en sept parties égales, opération assez minutieuse. Ce serait bien pis si l'on voulait employer le rapport de Métius : car on devrait alors diviser le diamètre en 113 parties égales. La méthode que suivent la plupart des artistes est moins exacte sans être beaucoup plus simple. En effet, lorsqu'ils veulent rectifier une circonférence, ils la partagent en un très-grand nombre de parties, et portent ensuite bout à bout sur une ligne droite les cordes de tous les arcs ainsi obtenus. La longueur déterminée de cette manière est trop petite, mais elle l'est d'autant moins que le nombre des divisions de la circonférence est plus grand (375). Voici une méthode fort simple, et qui est en même temps susceptible d'une grande exactitude.

Fig. 212. Inscrivez, dans la circonférence à rectifier, une corde AB égale au rayon; tirez le diamètre IC perpendiculaire sur cette corde, et menez au point C une tangente terminée au prolongement du rayon OA; portez enfin trois fois le rayon sur cette tangente à partir de F, et joignez GI : cette droite sera à très-peu près égale à la moitié de la circonférence (*a*).

(*a*) En effet, la similitude des triangles OCF et OKA donne : $FC = \frac{R\sqrt{3}}{3}$; partant $CG = \frac{R(9-\sqrt{3})}{3}$; le triangle rectangle CIG donnera alors :

$$GI = \frac{R\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}}{3} = R \cdot 3{,}1415333.$$

Mais la demi-circonférence est égale à

$$R \cdot 3{,}1415926 :$$

donc l'erreur est $R \cdot 0{,}000059$, c'est-à-dire moindre que $\frac{6}{100000}$ du rayon.

407. Le théorème du n.º 401 donne lieu à une foule d'applications importantes dans les arts : il fournit en particulier le moyen de calculer le rapport des vîtesses de deux roues dont l'une conduit l'autre, soit par le contact de leurs circonférences, soit par l'intermédiaire d'une courroie ou d'une chaîne sans fin.

En effet, dans le premier cas, tous les points de la circonférence de la roue sur laquelle agit le moteur allant successivement pousser l'autre, on voit que quand la plus grande aura fait un tour, la plus petite en aura fait autant que sa circonférence sera contenue de fois dans celle de cette plus grande.

Dans le second cas, la chaîne qui enveloppe les deux roues s'enroule évidemment sur la plus petite à mesure qu'elle abandonne la plus grande : de sorte que quand celle-ci aura fait un tour, tous les points d'une longueur de la chaîne égale à cette circonférence se seront présentés successivement au contact avec la petite : ainsi cette dernière aura fait autant de tours que sa circonférence est contenue de fois dans celle de la plus grande roue.

Or les circonférences sont proportionnelles à leurs rayons : donc *les vîtesses de deux roues dont l'une conduit l'autre, sont en raison inverse de leurs rayons.*

C'est encore sur ce même théorème qu'est fondée en partie la construction des roues dentées. On les exécute en effet de la manière suivante : des points qui doivent servir de centres aux deux roues, et avec des rayons qui sont en raison inverse des vîtesses qu'elles doivent avoir, on décrit deux circonférences tangentes OT, O'T, que l'on nomme circonférences *primitives* ; puis on arme les deux couronnes OA, O'A' de dents en nombres proportionnels aux rayons des circonférences primitives : ainsi les arcs de ces circonférences interceptés entre les milieux des différentes dents consécutives, sont tous égaux entre eux pour l'une et l'autre roue. Fig. 214

Il suit de ce tracé que si l'on a disposé la hauteur, l'épaisseur et l'espacement des dents de façon que dès l'instant où une dent a poussé sa correspondante jusqu'à son extrémité, les dents qui viennent immédiatement après soient à leur tour en prise, le mouvement se transmettra uniformément d'une roue à l'autre ; et l'on voit qu'autant de fois le nombre des dents de la plus grande contiendra celui des dents de la plus petite, autant

celle-ci fera de tours quand la première en exécutera un, de sorte que *leurs vîtesses seront en raison inverse des nombres de leurs dents*, ou, ce qui revient au même, *en raison inverse de leurs rayons*. Ainsi il sera facile de calculer, dans un système de roues dentées, *le rapport des vîtesses des deux roues extrêmes*, et l'on trouvera qu'il *est égal à celui du produit des nombres des dents des roues au produit des nombres des ailes des pignons*.

Pour que le mouvement soit *rigoureusement* uniforme pendant le temps où une dent est en prise avec sa correspondante, il faut que les dents soient terminées par des courbes que l'on enseigne à tracer dans les ouvrages sur *la théorie des machines;* mais, comme ce tracé est assez délicat, on élude la difficulté en multipliant le nombre des dents. Il suffit alors de leur donner la figure d'un rectangle dont on arrondit légèrement les angles. Alors elles prennent bientôt, en s'usant, une forme plus convenable.



CHAPITRE V.

DE LA MESURE DES AIRES.

408. L'Aire *d'une figure est la portion de l'étendue superficielle comprise entre les lignes qui terminent cette figure.* Pour mesurer cette aire, on la compare à une autre que l'on prend pour unité. Dans toute la suite de cet ouvrage *nous prendrons pour unité superficielle l'aire du carré dont le côté est égal à l'unité linéaire*, de sorte que *la mesure de l'aire d'une figure sera le rapport de son aire à celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur.*

THÉORÈME.

409. *Les aires de deux rectangles de même base sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

Fig. 214. Soient, en effet, ABCD et FGIK deux rectangles, que nous désignerons, pour plus de simplicité, par AC et par FI, et dont les bases AB et FG sont égales. Portons la hauteur KF du second sur celle AD du premier autant de fois que la chose sera pos-

sible. Nous trouverons qu'elle y est contenue *deux* fois avec le reste OD, de sorte que

$$AD = 2KF + OD.$$

Mais si par les points de division M et O nous menons des parallèles à AB, nous formerons les rectangles AN et MP respectivement égaux à FI : car il est évident que ces trois rectangles sont superposables; donc

$$AC = 2FI + OC.$$

On voit donc que le rectangle AC contient le rectangle FI autant de fois que la hauteur AD contient la hauteur FK, et que le rectangle restant OC a pour hauteur le reste OD. Par conséquent, si l'on porte à son tour OD sur FK, et que par les points de division on mène des parallèles à FG, on verra que le rectangle FI contiendra le rectangle OC autant de fois que la hauteur FK contiendra la hauteur OD, et que le rectangle restant aura pour hauteur la partie restante de FK; et ainsi de suite si l'on continue d'effectuer sur les hauteurs AD et FK, et sur les rectangles AC et FI, les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières quantités et celle des deux autres. Les deux séries de quotiens que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes : donc le rapport des deux rectangles AC et FI est le même que celui de leurs hauteurs AD et FK (37); donc on a la proportion

$$AC : FI :: AD : FK,$$

ce qu'il fallait démontrer.

410. Scolie. On peut dire aussi que *deux rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases :* car les noms de base et de hauteur s'appliquent indifféremment à chacun des deux côtés contigus d'un rectangle.

THÉORÈME.

411. *Les aires de deux rectangles quelconques sont proportionnelles aux produits de leurs bases par leurs hauteurs,* c'est-à-dire aux produits des nombres abstraits qui expriment les longueurs respectives de ces lignes.

Soient R et R' les aires des deux rectangles proposés; b et h, b' et h', les longueurs de leurs bases et de leurs hauteurs respectives. Construisons un troisième rectangle R'' qui ait même

base b que le premier, et même hauteur h' que le second. Alors, si nous le comparons successivement aux rectangles R et R', nous aurons, d'après le théorème précédent et d'après sa scholie, les proportions

$$\left.\begin{array}{l} R : R'' :: h : h' \\ R'' : R' :: b : b' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1):$$

d'où, en multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant le facteur R'' commun aux deux termes du premier rapport de la proportion produit,

$$R : R' :: b \cdot h : b' \cdot h',$$

ce qui démontre notre théorème (*a*).

THÉORÈME.

412. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*, c'est-à-dire que le rapport de cette aire à celle du carré qui a pour côté l'unité linéaire, est égal au produit des deux nombres abstraits qui expriment les rapports respectifs de sa base et de sa hauteur à cette unité linéaire.

Désignons, en effet, par R l'aire du rectangle à mesurer; par b et par h les longueurs respectives de sa base et de sa hauteur; par Q l'aire du carré que l'on prend pour unité de superficie: la base et la hauteur de ce carré seront donc égales chacune à l'unité linéaire; donc, en vertu du théorème précédent, le rapport du rectangle R au carré Q sera égal au rapport du produit $b \cdot h$ au produit $1 \cdot 1$, c'est-à-dire à $b \cdot h$; ainsi

$$\frac{R}{Q} = b \cdot h.$$

Mais le rapport $\frac{R}{Q}$ est la mesure de l'aire du rectangle R (408): donc cette mesure est égale au produit des deux nombres abstraits qui expriment les rapports de la base et de la hauteur du

---

(*a*) Remarquons que dans les proportions (1) on pourrait bien regarder les lettres R, R', R'', comme représentant des rectangles, et b, b', h, h' comme représentant des lignes, puisque les deux termes de chaque rapport sont alors des quantités homogènes; mais que, pour pouvoir multiplier ces proportions par ordre, il devient indispensable de regarder ces lettres comme représentant les nombres abstraits qui expriment les rapports de chacune de ces quantités à l'unité de son espèce. Il serait absurde en effet de prétendre multiplier un rectangle par un autre rectangle.

rectangle à l'unité linéaire; donc *l'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

413. La vérité de cette proposition devient évidente à l'inspection seule de la figure, lorsque les longueurs des deux *dimensions* du rectangle (on appelle ainsi sa base et sa hauteur) sont des nombres entiers : car si, après avoir porté le côté du carré que l'on prend pour unité de superficie, c'est-à-dire l'unité linéaire, sur chacune des dimensions du rectangle, on mène par tous les points de division de la hauteur AD des parallèles à la base, on le partagera en autant de rectangles de même base et d'*une unité* de hauteur qu'il y a d'unités dans AD. Mais si l'on mène aussi des parallèles à la hauteur par tous les points de division de la base AB, on partagera chacun de ces rectangles partiels en autant de carrés ayant l'unité linéaire pour côté, que cette unité est contenue de fois dans AB : donc, enfin, le rectangle proposé contiendra autant de fois l'unité superficielle qu'il y a d'unités dans le produit du nombre d'unités linéaires de sa base par le nombre d'unités linéaires de sa hauteur. Fig. 215.

Il sera facile d'étendre cette démonstration au cas où les longueurs des dimensions du rectangle seraient des nombres fractionnaires. Supposons, par exemple, que $AB = 3^{m} \frac{6}{10}$, et que $BC = 2^{m} \frac{45}{100}$: si l'on mène encore des parallèles aux côtés du rectangle par les points de division de sa base et de sa hauteur, on le partagera en mètres carrés et en parties de mètre carré. Or le petit rectangle Eb vaut les $\frac{6}{10}$ d'un mètre carré (410) : ainsi le rectangle Ab contient $3^{m.q} \frac{6}{10}$; par conséquent le rectangle Ac vaut $3^{m.q} \frac{6}{10} \times 2$. Mais le rectangle dC est les $\frac{45}{100}$ du rectangle Ab (409), et vaut ainsi $3^{m.q} \frac{6}{10} \times \frac{45}{100}$: donc le rectangle total vaut $3^{m.q} \frac{6}{10} \times 2 + 3^{m.q} \frac{6}{10} \times \frac{45}{100} = (3\frac{6}{10} \times 2\frac{45}{100})$ mètres carrés, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur. Fig. 216.

THÉORÈME.

414. *L'aire d'un carré a pour mesure la seconde puissance de son côté.*

En effet, le carré étant un rectangle dont les deux dimensions sont égales, son aire aura pour mesure la seconde puissance de l'une d'elles (*a*).

(*a*) Ainsi, lorsque l'on forme la seconde puissance d'un nombre, on exécute l'opération nécessaire pour évaluer l'aire du carré dont le côté contiendrait

415. COROLLAIRE I. Si l'on observe que les carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5.... sont respectivement 1, 4, 9, 16, 25...., on verra que le carré construit sur une ligne double, triple, quadruple, quintuple, etc., d'une autre, sera 4, 9, 16, 25...... fois plus grand que celui fait sur cette autre.

Réciproquement, pour faire un carré qui soit 4, 9, 16, 25..., fois plus grand ou plus petit qu'un autre, il faudra le con ruire sur une droite qui soit 2, 3, 4, 5...... fois plus ou moins grande que le côté de cet autre carré.

416. COROLLAIRE II. En France, où le mètre est l'unité linéaire, *l'unité de superficie est le* MÈTRE CARRÉ. *Cette unité se subdivise en cent décimètres carrés* (408 et 414). *Le décimètre carré vaut cent centimètres carrés, et le centimètre carré vaut cent millimètres carrés.*

Il suit de là que, *pour convertir un nombre quelconque de mètres carrés en* DÉCIMÈTRES CARRÉS, *ou en* CENTIMÈTRES CARRÉS, *ou en* MILLIMÈTRES CARRÉS, *il suffit d'avancer la virgule de* DEUX, *ou de* QUATRE, *ou de* SIX *rangs vers la droite.*

Exemple. Quelle est, en mètres carrés, décimètres carrés, centimètres carrés et millimètres carrés, l'aire d'un rectangle dont la base a $2^{m},36$, et la hauteur $1^{m},234$?

Je multiplie entre eux les deux nombres *abstraits* 2,36 et 1,234, ce qui donne pour produit 2,91224 : ainsi l'aire demandée égale $2^{m.q},91224$, c'est-à-dire *deux mètres carrés quatre-vingt-onze mille deux cent vingt-quatre cent-millièmes de mètre carré, ou 2 mètres carrés* 91 *décimètres carrés* 22 *centimètres carrés et* 40 *millimètres carrés.*

Autrefois l'unité linéaire était la *toise* de Paris, dont le rapport au mètre est à-peu-près 1,94904. Elle se subdivisait en 6 pieds, le pied en 12 pouces, et le pouce en 12 lignes. En conséquence *l'unité de surface était la* TOISE CARRÉE, *laquelle valait* 36 PIEDS CARRÉS (414). *Le p ed carré se composait de* 144 POUCES CARRÉS, *et le pouce carré de* 144 LIGNES CARRÉES.

La loi a supprimé ces mesures; ais elle a malheureusement toléré l'usage d'une toise de deux mètres soumise aux mêmes sub-

---

précisément ce nombre-là d'unités linéaires. C'est pour cela qu'on a appelé carré d'un nombre la seconde puissance de ce nombre.

C'est par une raison semblable que l'on emploie l'expression *rectangle de deux nombres*, pour désigner leur produit.

divisions que l'ancienne, ce qui fait perdre au système métrique son principal avantage pratique, celui du calcul décimal. Lorsque les dimensions d'un rectangle sont ainsi évaluées en toises et fractions de toise, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de convertir chacune en unités du dernier ordre. Par exemple, si la base d'un rectangle est de 9 $5^p\ 7^p$, et sa hauteur de $3^t\ 4^p$, on prendra le pouce pour unité linéaire, et par conséquent le pouce carré pour unité superficielle; on convertira la base et la hauteur en pouces; et, en multipliant entre eux les deux nombres ainsi trouvés, 715 et 264, on verra que l'aire de notre rectangle est 188760 pouces carrés; et, comme $1^{p.q} = 144^{p.q}$, on convertira cette aire en pieds carrés en divisant 188760 par 144, ce qui donnera $1310^{p.q} + 120^{p.q}$. Mais la toise carrée vaut $36^{p.q}$: donc, en divisant 1310 par 36, on saura combien il y a de toises carrées dans notre rectangle. En effectuant cette division, on trouvera pour sa mesure $36^{t.q} + 14^{p.q} + 120^{p.q}$.

THÉORÈME.

417. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

En effet tout parallélogramme est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur (234) : leurs aires ont même mesure; donc l'aire du parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur (412).

418. Corollaire. Les aires de deux parallélogrammes quelconques sont proportionnelles à leurs mesures respectives, c'est-à-dire aux produits de leurs bases par leurs hauteurs : donc ces parallélogrammes seront dans le rapport de leurs bases s'ils ont même hauteur, ou dans celui de leurs hauteurs s'ils ont même base.

THÉORÈME.

419. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

En effet nous avons vu que tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (235).

420. Corollaire I. Les moitiés étant proportionnelles aux tous, on voit que *les aires de deux triangles quelconques seront entre elles* comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, et par conséquent *comme leurs bases si ces triangles ont même hauteur, ou comme leurs hauteurs s'ils ont même base.*

421. Corollaire II. *Pour transformer un triangle en un carré, il n'y aura qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre sa base et la moitié de sa hauteur, et l'on aura le côté du carré demandé :* car le carré de cette moyenne proportionnelle sera égal au produit de la base du triangle par la moitié de sa hauteur, c'est-à-dire à son aire. Ainsi l'on prendra
Fig. 217. le milieu F de la hauteur AD; on prolongera FD d'une quantité DG=CB; et, en décrivant une demi-circonférence sur FG, on déterminera la moyenne proportionnelle DI entre DF et DG (314).

422. Corollaire III. On pourra ainsi transformer un polygone quelconque en un carré, puisque nous avons donné précédemment le moyen de changer tout polygone en un triangle (268).

PROBLÈME.

423. *Etant données les longueurs des trois côtés d'un triangle, calculer son aire.*

Fig. 155. Soit ABC le triangle proposé. Désignons par a, b, c, les longueurs respectives des côtés BC, AC et AB; et par h celle de sa hauteur AI. Il est clair que si l'on connaissait l'un des segmens de la base, BI, par exemple, on pourrait, au moyen du théorème de Pythagore (303), calculer cette hauteur, et obtenir ainsi l'aire de notre triangle. Or on sait que dans tout triangle le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres diminuée du double produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur lui (306). Puis donc que BI est la projection du côté AB sur BC, nous aurons :

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot BI,$$

ou

$$b^2=c^2+a^2-2a\cdot BI;$$

b^2 étant ainsi l'excès de c^2+a^2 sur $2a\cdot BI$, on aura la valeur de cette quantité en retranchant b^2 de c^2+a^2, de sorte que

$$2a\cdot BI=c^2+a^2-b^2.$$

Cette égalité exprime que $c^2+a^2-b^2$ est le produit de $2a$ par BI : donc, en le divisant par le facteur $2a$, on aura l'autre facteur BI; ainsi

$$BI=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$

Nous connaissons donc maintenant dans le triangle rectangle

ABI, l'hypothénuse AB et le côté BI : donc, en lui appliquant le théorème de Pythagore, nous aurons :

$$h^2 = c^2 - \frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2},$$

en réduisant l'entier c^2 et la fraction qui l'accompagne en une seule fraction. Or le numérateur de cette dernière fraction est la différence des carrés de $2ac$ et de $c^2+a^2-b^2$; et, comme on démontre dans l'algèbre que *la différence des carrés de deux quantités est égale à la somme de ces quantités multipliée par leur différence*, et que, *pour soustraire une quantité d'une autre, il suffit de l'écrire à sa suite avec des signes contraires à ceux dont elle est affectée*, on verra que ce numérateur revient à

$$(2ac+c^2+a^2-b^2)\,(2ac-c^2-a^2+b^2).$$

Mais $2ac+c^2+a^2=(a+c)^2$: ainsi la quantité comprise dans la première parenthèse revient à $(a+c)^2-b^2$, c'est-à-dire à $(a+c+b)\,(a+c-b)$, puisqu'elle est la différence des carrés de $(a+c)$ et de b. La seconde parenthèse $2ac-c^2-a^2+b^2$, peut être considérée comme ce qui reste, lorsque de b^2 on retranche a^2+c^2-2ac, c'est-à-dire le carré de $(a-c)$: elle est donc la différence des carrés de b et de $(a-c)$, et revient par conséquent à

$$(b+a-c)\,(b-a+c).$$

D'après ces transformations la valeur trouvée pour h^2 deviendra :

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}.$$

Si l'on représente le demi-périmètre du triangle par p, et par conséquent son périmètre par $2p$, on aura :

$$a+b+c=2p;$$

et, retranchant successivement $2a$, $2b$ et $2c$ de part et d'autre, il viendra :

$$b+c-a=2(p-a),$$
$$a+c-b=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c);$$

donc, en substituant dans l'expression de h^2, et divisant ensuite les deux termes de la fraction par 4,

$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2};$$

partant

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}\ldots(1).$$

Multipliant enfin cette quantité par $\frac{a}{2}$, on trouvera pour expression de l'aire A d'un triangle en fonction de ses côtés :

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}:$$

ce qui nous apprend que, *pour calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés ; il faut du demi-périmètre du triangle retrancher successivement chacun de ses côtés, multiplier les trois restes entre eux et par le demi-périmètre, et extraire la racine carrée du produit.*

Si l'on veut appliquer les logarithmes au calcul de la valeur de A, on aura :

$$L.A=\frac{L.p+L.(p-a)+L.(p-b)+L.(p-c)}{2},$$

formule qu'il est également facile de traduire en langage ordinaire.

Exemple. Les trois côtés d'un triangle valent respectivement $1370^{m},34$; $1827^{m},12$; $2283^{m},9$: quelle est son aire ?

Je représente ces trois côtés respectivement par a, b, c, et leur somme par $2p$, et j'exécute les calculs ci-dessous :

$$\begin{aligned}
a &= 1370^{m},34\\
b &= 1827,12\\
c &= 2283,90\\
\hline
2p &= 5481,36\\
p &= 2740,68\ldots\ldots & L.p &= 3,4378584\\
p-a &= 1370,34\ldots\ldots & L.(p-a) &= 3,1368284\\
p-b &= 913,56\ldots\ldots & L.(p-b) &= 2,9607371\\
p-c &= 456,78\ldots\ldots & L.(p-c) &= 2,6597071\\
\hline
& & & 12,1951310\\
& & L.A &= 6,0975655\\
& & A &= 1251888
\end{aligned}$$

Ainsi l'aire du triangle est $1251888^{m.q}$, à moins d'un mètre carré près.

THÉORÈME.

424. *L'aire d'un triangle est égale à son périmètre multiplié par la moitié de son apothême.*

Si l'on joint, en effet, le centre du cercle inscrit au triangle avec ses trois sommets, on le partagera en trois autres qui auront pour bases respectives les côtés de ce triangle, et pour hauteur commune son apothême : ainsi leurs aires seront égales à ces côtés multipliés chacun par la moitié de cet apothême. Or, dans l'addition de ces aires partielles, on pourra mettre la moitié de l'apothême en facteur commun, et l'on trouvera ainsi pour expression de l'aire demandée la somme des côtés du triangle, ou son périmètre par la moitié de son apothême. Fig. 218.

THÉORÈME.

425. *Le produit des trois côtés d'un triangle est égal au double de son aire multiplié par le diamètre du cercle circonscrit.*

Par un des sommets C du triangle menons le diamètre CD, joignons AD, et abaissons du sommet de l'angle A la perpendiculaire AF sur le côté opposé BC. Les deux triangles DAC, BAF, sont semblables : car ils sont rectangles, l'un en A, l'autre en F; et les angles D et B sont égaux comme inscrits dans le même segment CBDA : ainsi leurs côtés homologues sont proportionnels, et l'on a Fig. 219.

$$DC : AB :: AC : AF;$$

d'où, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens,

$$AB \cdot AC = AF \cdot DC.$$

Multipliant ces deux produits chacun par BC, il viendra :

$$BC \cdot AB \cdot AC = BC \cdot AF \cdot DC,$$

égalité qui démontre notre proposition : car BC·AF est le double de l'aire du triangle ABC, et DC est le diamètre du cercle circonscrit.

THÉORÈME.

426. *L'aire d'un trapèze* AC *a pour mesure la demi-somme de ses bases parallèles* AB *et* CD, *multipliée par sa hauteur* DE. Fig. 103.

Tirons, en effet, la diagonale DB : nous partagerons notre tra-

pèze en deux triangles ADB et BCD; et il est clair qu'en faisant la somme de leurs aires, nous aurons celle du trapèze ABCD.

Or le triangle ABD a évidemment pour mesure la moitié de sa base AB, multipliée par sa hauteur DE,

$$\tfrac{1}{2}AB \cdot DE.$$

Le triangle BCD a de même pour mesure

$$\tfrac{1}{2}DC \cdot DE:$$

car la perpendiculaire que l'on abaisserait de son sommet B sur la base DC serait égale à DE, comme parallèles comprises entre parallèles. Additionnant ces deux produits, et mettant DE en facteur commun, il viendra :

$$(\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC) \cdot DE \text{ ou } \frac{AB + DC}{2} \cdot DE,$$

c'est-à-dire la demi-somme des bases parallèles du trapèze multipliée par sa hauteur.

427. Corollaire. Si par le milieu G du côté AD nous menons GLK parallèle aux bases AB et CD, nous formerons le triangle DGL, semblable à DAB : ainsi les côtés homologues de ces triangles seront proportionnels. Mais DG est la moitié de DA : donc DL et GL sont les moitiés respectives de DB et de AB; donc, *si par le milieu de l'un des côtés d'un triangle on mène une parallèle à l'un des deux autres côtés, elle sera la moitié de ce côté, et passera par le milieu du troisième.* Il suit de là que le point K sera le milieu de CB, et que LK sera la moitié de CD : donc GK est la demi-somme des deux bases AB et DC; donc, *si par le milieu de l'un des côtés non parallèles d'un trapèze on mène une parallèle aux bases, cette droite passera par le milieu de l'autre côté, et sera la demi-somme des deux bases.*

On peut donc dire que *l'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles multipliée par sa hauteur.*

428. Il serait facile, en s'appuyant sur la formule (1) du n.° 423, de calculer la surface d'un trapèze en fonction de ses côtés. Supposons, par exemple, que les côtés parallèles AB et CD soient respectivement de 10^m et de 6^m, et les deux autres AD et BC de 3^m et de 5^m. Je mène DO parallèle à CB : cette droite vaudra par conséquent 5^m, et AO en vaudra $10-6=4$.

Alors le périmètre du triangle ADO sera 12^m, et l'on aura: $p=6$, $p-AO=2$, $p-DO=1$, $p-AD=3$; donc, en vertu de la formule (1) du n.° 423, $h=\frac{2}{4}\sqrt{6\cdot2\cdot1\cdot3}=3$, ce qu'on aurait pu prévoir, puisque les côtés DA, AO et OD du triangle *ADO* étant respectivement de 3, 4 et 5 mètres, l'angle A est *alors* droit (307, 3.°). L'aire de notre trapèze aura donc pour mesure

$$\frac{10+6}{2}\cdot3=24^{m.q.}$$

THÉORÈME.

429. *L'aire d'un polygone régulier quelconque a pour mesure son périmètre multiplié par la moitié de son apothême.*

Si l'on joint, en effet, le centre du cercle inscrit au polygone avec chacun de ses sommets, on le partagera en autant de triangles qu'il a de côtés : de sorte qu'en additionnant les aires de tous ces triangles, on aura celle du polygone proposé. Or ces triangles auront pour bases respectives les différens côtés du polygone, et pour hauteur commune son apothême : ainsi chacun d'eux aura pour mesure le côté du polygone qui lui sert de base multiplié par la moitié de cet apothême. Dans l'addition de ces aires partielles on pourra mettre la moitié de l'apothême en facteur commun, et alors on trouvera pour l'expression de l'aire demandée, la somme des côtés du polygone, c'est-à-dire son périmètre multiplié par la moitié de son apothême.

430. Corollaire. Cette mesure de l'aire d'un polygone régulier, étant indépendante du nombre de ses côtés, doit par conséquent convenir au cercle : donc *l'aire d'un cercle a pour mesure le produit de sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon.* Nous allons démontrer ce théorème indépendamment des considérations du n.° 393.

THÉORÈME.

431. *L'aire d'un cercle a pour mesure le produit de la circonférence multipliée par la moitié du rayon*, c'est-à-dire que

$$cerc\ OA = circ\ OA\cdot\tfrac{1}{2}OA.$$ Fig. 220.

En effet, si le produit *circ* $OA\cdot\frac{1}{2}OA$ n'est pas la mesure de

l'aire du cercle OA, ce sera la mesure de celle d'un cercle dont le rayon sera plus grand ou plus petit que OA. Supposons-le plus petit, et soit OA' ce rayon, de sorte que

$$cerc\ OA' = circ\ OA \cdot \tfrac{1}{2} OA \ldots\ldots\ldots (1).$$

J'inscris dans la plus grande des deux circonférences un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite, et je représente par A l'aire de ce polygone, et par P son périmètre. Nous aurons pour expression de cette aire :

$$A = P \cdot \tfrac{1}{2} OI \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Or on voit, en comparant les deux produits $circ\ OA \cdot \frac{1}{2} OA$ et $P \cdot \frac{1}{2} OI$, que le facteur $circ\ OA > P$, et que le facteur $\frac{1}{2} OA$ est aussi plus grand que $\frac{1}{2} OI$; qu'ainsi le premier produit est plus grand que le second. Il faut donc que l'aire du cercle OA' surpasse celle A du polygone ABCDEF, ce qui est absurde, puisque ce polygone enveloppe le cercle OA'. Or cette absurdité est une conséquence des égalités (1) et (2) : la vérité de la seconde a été démontrée; donc la première est fausse; donc il n'est pas possible que le produit $circ\ OA \cdot \frac{1}{2} OA$ soit la mesure d'un cercle d'un rayon plus petit que OA. On prouverait de même que ce produit ne peut mesurer l'aire d'un cercle d'un rayon plus grand que OA : donc il est la mesure du cercle OA.

432. Corollaire I. Il suit de là et de la règle donnée pour calculer la circonférence d'un cercle en fonction de son rayon (403), que si l'on représente ce rayon par R, on aura pour mesure de l'aire du cercle : $2\pi \cdot R \cdot \frac{1}{2} R = \pi \cdot R^2$; ainsi

$$cerc\ R = \pi \cdot R^2;$$

donc, *pour calculer l'aire d'un cercle, il faut multiplier le rapport de la circonférence au diamètre par le carré du rayon.*

Veut-on, par exemple, l'aire d'un cercle de trois mètres de rayon à moins d'un centimètre carré : on observera que, l'expression de cette aire étant 9π, pour que l'erreur soit moindre qu'un centimètre carré, c'est-à-dire que $\frac{1}{10000}$ de mètre carré, la valeur de π ne devra pas être fautive de $\frac{1}{90000}$. On prendra donc les *cinq* premières décimales de la valeur de π, et l'aire demandée sera $3{,}14159 \cdot 9 = 28^{m.q}\ 27^{d.m.q}\ 43^{c.m.q}$.

433. Corollaire II. Il suit encore du théorème précédent, que, *pour trouver la* QUADRATURE DU CERCLE, c'est-à-dire pour construire un carré équivalent à un cercle donné, *il ne s'agit que de*

chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de la circonférence de ce cercle et son rayon, et l'on aura ainsi le côté du carré demandé. Mais, comme nous n'avons pas de moyen géométrique pour rectifier la circonférence (406), il s'ensuit que nous n'en avons pas non plus pour trouver la quadrature du cercle. Quoiqu'on n'ait pas encore démontré qu'il soit impossible de résoudre ce problème *en n'employant que la règle et le compas*, néanmoins l'inutilité de toutes les tentatives que depuis plus de deux mille ans on a faites pour y parvenir, doit nous faire penser que ce problème n'est pas du ressort de la géométrie élémentaire. Toutefois, si l'on veut trouver approximativement le côté d'un carré équivalent au cercle OC de la figure 212, on décrira sur G comme diamètre, une demi-circonférence; on rabattra le rayon OI en IO'; on élèvera la perpendiculaire O'M sur IG, et, en joignant IM, on aura à fort peu près le côté du carré demandé (304, 2.°).

Le calcul permet de résoudre le même problème avec une exactitude presque indéfinie : car nous avons vu que l'on a poussé la détermination de la valeur du rapport de la circonférence au diamètre jusqu'à 154 décimales. Veut-on, par exemple, à moins d'un millième près, le côté du carré équivalent au cercle dont le rayon serait de 3^m : comme sa valeur est alors $\sqrt{9\pi}$, on prendra la valeur de π exacte à moins d'une demi-unité du septième ordre décimal, et l'on en déduira : $9\pi = 28{,}274333$, en négligeant les décimales de ce septième ordre, et cette valeur n'est pas fautive d'un millionième. En en extrayant la racine carrée, on trouve pour le côté du carré demandé $5^m{,}317$.

THÉORÈME.

434. *L'aire d'un secteur* AMBO (330) *a pour mesure l'arc* AMB, *qui lui sert de base, multiplié par la moitié du rayon* AO. Fig. 221.

En raisonnant, en effet, comme nous l'avons fait au n.° 131, on démontrerait que l'aire d'un secteur est à celle du cercle comme l'arc qui lui sert de base est à la circonférence : de sorte qu'en représentant par A l'aire d'un secteur, par a la longueur de son arc, et par R celle du rayon du cercle auquel il appartient, on a la proportion

$$A : \textit{cerc}\,R :: a : \textit{circ}\,R.$$

Multipliant les deux termes du second rapport par $\frac{1}{2}$ R, il viendra :

$$A : cerc\,R :: a \times \tfrac{1}{2}R : circ\,R \times \tfrac{1}{2}R.$$

Or les conséquens de cette dernière proportion sont égaux (431): donc il en doit être de même des antécédens; donc

$$A = a \times \tfrac{1}{2}R,$$

ce qui démontre notre théorème.

435. On voit ainsi que, pour évaluer l'aire d'un secteur, lorsqu'on donne seulement le rayon et le nombre de grades et de parties de grades de l'arc qui lui sert de base, on doit commencer par calculer la longueur de cet arc. Supposons, par exemple, que l'on demande l'aire d'un secteur dont l'arc est de $15^G\,75'$ et le rayon $12^m,7$. On observera que dans un même cercle les longueurs des arcs sont proportionelles aux nombres de grades et de parties de grade qu'ils contiennent; or la longueur de l'arc de 200^G est ici $12^m,7 \times \frac{22}{7}$ (405), en adoptant le rapport d'Archimède; donc on aura la longueur de l'arc de $15^G\,75'$ par la proportion

$$200^G : 15^G\,75' :: 12^m,7 \times \tfrac{22}{7} : x^m;$$

d'où l'on tire: $x = 22^m,00275$, en substituant au rapport des nombres concrets 200^G et $15^G\,75'$, le rapport équivalent $200 : 15,75$. Ainsi l'aire de notre secteur est égale à

$$(22,00275 \times \tfrac{12,7}{2})^{m.q} = 139^{m.q},7174625.$$

Second exemple. Supposons que, l'arc étant de $15°\,25'$, *et le* rayon de $4^t\,5^p$, on demande l'aire du secteur en toises carrées, pieds carrés, etc. Nous observerons que si l'on connaissait l'aire demandée en pieds carrés, il serait facile de l'évaluer en toises carrées: car une toise carrée vaut 36 pieds carrés (416). Prenons donc le pied pour unité linéaire, et convertissons $4^t\,5^p$ en pieds, ce qui donnera 29^p : alors on déterminera la longueur de l'arc de $15°\,25'$ par la proportion

$$180° : 15°\,25' :: 29^p \cdot \tfrac{22}{7} : x^p.$$

Pour substituer au rapport des nombres concrets 180° et 15° 25' un rapport de nombres abstraits, on convertira ces deux nombres en minutes, ce qui donnera le rapport de 10800 à 925, ou, ce qui revient au même, celui de 432 à 37. On aura donc ainsi :

$$432 : 37 :: 29^p \cdot \tfrac{22}{7} : x^p :$$

l'où, en multipliant les antécédens par 7, et les divisant par 2,

$$1512 : 37 :: 29^{p} \cdot 11 : x^{p} = \frac{29^{p} \cdot 11 \cdot 37}{1512}.$$

Telle est donc la longueur d'un arc de 15° 25′ dans une circonférence dont le rayon a 29^{p}. Pour avoir l'aire du secteur, il ne s'agira plus que de faire le produit des nombres abstraits $\frac{29 \cdot 11 \cdot 37}{1512}$ et $\frac{29}{2}$, qui expriment les rapports de l'arc et de la moitié du rayon au pied, ce qui donnera $\frac{342287}{3024}$ pieds carrés, ou, ce qui revient au même, $113^{p.q}\, 27^{p.q}\, 54^{l.q}\, \frac{6}{7} = 3^{t.q}\, 5^{p.q}\, 27^{p.q}\, 54^{l.q}\, \frac{6}{7}$.

436. *On appelle* SINUS *d'un arc la perpendiculaire abaissée de l'une de ses extrémités sur le rayon qui passe par l'autre :* ainsi AP est le sinus de l'arc AMB.

THÉORÈME.

437. *L'aire d'un segment de cercle* AMBA (330) *a pour mesure la moitié de son rayon multipliée par l'excès de cet arc sur son sinus.*

En effet l'aire du segment AMB est évidemment la différence des aires du secteur AMBO, et du triangle ABO. Mais le secteur a pour mesure $\frac{BO}{2} \cdot AMB$; l'aire du triangle est égale à $\frac{BO}{2} \cdot AP$: donc le segment aura pour mesure la différence de ces deux produits, c'est-à-dire, en mettant $\frac{BO}{2}$ en facteur commun, $\frac{BO}{2} \cdot (AMB - AP)$, ce que nous voulions démontrer.

On voit donc que, quand on connaîtra un arc et son rayon, on devra pouvoir calculer le segment de cercle correspondant : car le sinus d'un arc donné est nécessairement déterminé. Cependant le calcul du sinus d'un arc donné est un problème que la géométrie élémentaire ne peut résoudre que dans un petit nombre de cas très-particuliers, de sorte qu'en général il faudra avoir recours à la table des cordes; et en effet le sinus AP de l'arc AMB est la moitié de la corde AA′ qui sous-tend l'arc AMA′, double de AMB.

Exemple. *Calculer l'aire d'un segment dont l'arc est de* 86° 11′ *dans le cercle dont le rayon est* R.

Le sinus de 86°11′ est la moitié de la corde qui sous-tend un

arc de 172° 22'. Mais notre table ne va que jusqu'à 90° : comment donc avoir sa corde ? Pour cela je prends le supplément de 172° 22', qui est 7° 38', et je trouverai dans la table que la corde de cet arc est 13,31. Mais si AA' est la corde 172° 22', A'C est celle de 7 38', et le triangle rectangle AA'C donne, en représentant le rayon par r : $AA' = \sqrt{4r^2 - \overline{A'C}^2}$; et, comme la différence des carrés de deux quantités est égale au produit de leur somme par leur différence, nous aurons :

$$AA' = \sqrt{(2r + A'C)(2r - A'C)};$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$L.AA' = \frac{L.(2r + A'C) + L.(2r - A'C)}{2},$$

formule au moyen de laquelle on pourra calculer la corde d'un arc plus grand qu'un quadran en fonction de celle de l'arc supplémentaire. En l'appliquant au cas actuel, où le rayon de notre table vaut 100 unités, et $A'C = 13,31$, on verra que

$$2r + A'C = 213,31 \ldots\ldots L.(2r + A'C) = 2,3290112$$
$$2r - A'C = 186,69 \ldots\ldots L.(2r - A'C) = 2,2711211$$
$$4,6001333$$
$$L.A'A = 2,3000666$$
$$AA' = 199,56$$

Partant $\sin AMB = 99,78$.

Or les cordes, et par conséquent les sinus des arcs semblables sont proportionnels aux rayons de ces arcs (352) : donc le sinus de 86 11', dans le cercle dont le rayon est R, vaudra $R \cdot 0,9978$. D'un autre côté, on trouvera facilement que la longueur de cet arc est $R \cdot 3,0096$: donc sa différence avec son sinus est $R(3,0096 - 0,9978) = R \cdot 2,1118$; et par conséquent l'aire du segment égale $R \cdot 2,1118 \cdot \frac{R}{2} = R^2 \cdot 1,0559$.

PROBLÈME.

438. *Mesurer l'aire d'un polygone irrégulier quelconque.*

Il peut se présenter deux cas, selon que l'intérieur du polygone est accessible ou qu'il ne l'est pas.

Premier cas. 1.° Si l'on peut parcourir le polygone dans tous les sens, on le partagera en triangles, en ayant soin de faire

partir toutes les lignes de division du sommet d'un même angle si la chose est possible, et il ne s'agira plus alors que d'évaluer les aires de ces différens triangles. Pour abréger les opérations, on donnera, si cela se peut, la même base à deux triangles adjacens: car alors, dans l'addition de leurs aires, on mettra cette base en facteur commun, et l'on trouvera ainsi que l'aire du quadrilatère formé par ces deux triangles est égale à la base commune multipliée par la demi-somme de leurs hauteurs. De cette manière on remplacera une multiplication par une addition. Ainsi, dans la figure 222, on prendra la diagonale AC pour base commune des triangles ABC et ADC, et, en abaissant sur cette base les perpendiculaires BB' et DD', on verra que, leurs aires respectives étant $AC \cdot \frac{BB'}{2}$ et $AC \cdot \frac{DD'}{2}$, celle du quadrilatère ABCD sera $AC \cdot \frac{BB' + DD'}{2}$. Prenant de même AE pour base commune des deux triangles ADE et AFE, on trouvera que l'aire du quadrilatère ADEF a pour mesure $AE \cdot \frac{DD'' + FF'}{2}$; et, comme celle du triangle AGF a pour expression $AF \cdot \frac{GG'}{2}$, on en conclura que la mesure de l'aire du polygone entier est Fig. 222.

$$\tfrac{1}{2}\left\{ AC \cdot (BB' + DD') + AE \cdot (DD'' + FF') + AF \cdot GG' \right\}.$$

Observons toutefois qu'il sera encore plus simple, et surtout plus exact, d'évaluer l'aire de chaque triangle en fonction immédiate de ses côtés (423), puisqu'on sera ainsi dispensé d'abaisser la hauteur de chacun.

2.° On peut encore parvenir à évaluer l'aire d'un polygone quelconque, en le décomposant en triangles et en trapèzes rectangles. Pour cela on tirera, dans le sens de la plus grande largeur, d'un angle à un autre du polygone, une droite AI, que l'on nomme *directrice;* puis des sommets B, C, D....., K, on abaissera des perpendiculaires BB', CC', DD'....., KK', sur cette droite; et des points F et G, FF' et GG', perpendiculaires sur DD'. Mesurant ensuite AB', B'C', C'D', D'I, BB', KK', CC', DF', F'G', G'D', FF' et GG', on aura les élémens nécessaires à la détermination des aires de toutes les parties ABB', BC', CD', DFF', FG', GD' et AKI, dans lesquelles nous avons décomposé notre polygone. Supposons, par exemple, que l'on ait trouvé : Fig. 223.

14

$AB' = 15^m,8 \quad B'C' = 12^m,6 \quad C'D' = 21^m,4 \quad D'I = 30^m,2$

$BB' = 17,3 \quad KK' = 18,1 \quad CC' = 10,5 \quad DF' = 10,8$

$F'G' = 16,4 \quad G'D' = 11 \quad FF' = 14,1 \quad GG' = 8,6.$

Il en résultera d'abord que $AI = 80^m$, et que $DD' = 38^m,2$. (Il sera bon d'ailleurs de mesurer directement ces lignes pour se fournir des vérifications.) On verra ainsi que

$$
\begin{aligned}
ABB' &= \tfrac{15,8}{2} \cdot 17,3 &&= 136^{m.q},67\\
B'C' &= (17,3 + 10,5) \cdot \tfrac{12,6}{2} &&= 175,\ 14\\
C'D' &= (10,5 + 38,2) \cdot \tfrac{21,4}{2} &&= 521,\ 09\\
DFF' &= \tfrac{10,8}{2} \cdot 14,1 &&= 76,\ 14\\
FG' &= (14,1 + 8,6) \cdot \tfrac{16,4}{2} &&= 186,\ 14\\
G'I &= (8,6 + 30,2) \cdot \tfrac{11}{2} &&= 213,\ 40\\
AKI &= \tfrac{80}{2} \cdot 18,1 &&= 724,\ 00\\
& && \overline{2032,\ 58}
\end{aligned}
$$

Ainsi l'aire du polygone est de $2032^{m.q},58$.

Fig. 224. *Deuxième cas.* Si l'intérieur du polygone était inaccessible, comme le serait un bois fourré et impénétrable ou un étang, on circonscrirait un rectangle à ce polygone, en ayant soin, pour plus de simplicité, de diriger un de ses côtés suivant un de ceux du polygone, et de faire passer les trois autres par les sommets de trois angles de ce polygone. Au moyen de parallèles menées aux côtés de ce rectangle par les sommets des angles du polygone, on partagera l'intervalle compris entre son périmètre et celui du rectangle en triangles et en trapèzes rectangles (si quelque partie ne se prêtait pas à cette décomposition, on la diviserait en triangles par des diagonales), dont il sera facile d'évaluer les aires. Retranchant enfin la somme de ces aires de celle du rectangle, on obtiendra évidemment celle du polygone.

439. Si une ou plusieurs parties du périmètre de la surface plane à mesurer étaient courbes, on distinguerait encore deux cas suivant que l'on pourrait pénétrer dans l'intérieur de la figure ou qu'on ne le pourrait pas, et l'on opèrerait dans chaque cas, comme nous l'avons fait au n.º 438. La difficulté serait
Fig. 225. ainsi réduite à mesurer les espaces B'BCQDFF', GII' et PON, ou CB''B, CQD, DFF'', GII'', ONN', ORP'P. Occupons-nous donc d'évaluer ces différentes aires.

PROBLÈME.

Fig. 226. 440. *Mesurer l'aire comprise entre une courbe* AMB, *une*

droite A'B', et les perpendiculaires abaissées sur cette droite des deux extrémités de la courbe.

On partagera la droite A'B' en un certain nombre de parties égales, et par tous les points de division C', D', F', on élèvera des perpendiculaires C'C, D'D, F'F, à A'B' (on se contentera de faire planter des jalons aux points où elles coupent la ligne AMB). Si ces perpendiculaires sont suffisamment rapprochées, les arcs AC, CD, DF, FB, diffèreront très-peu de leurs cordes, de sorte que l'on pourra, sans erreur sensible, regarder le *segment* A'AMBB' comme partagé en trapèzes rectangles. Il sera donc facile d'évaluer ses différentes parties, et l'on trouvera que

$$A'C = \frac{AA' + CC'}{2} \cdot A'C', \quad C'D = \frac{CC' + DD'}{2} \cdot A'C',$$

$$D'F = \frac{DD' + FF'}{2} \cdot A'C', \quad F'B = \frac{FF' + BB'}{2} \cdot A'C',$$

puisque tous ces trapèzes ont des hauteurs égales à A'C'. En additionnant tous ces produits, on pourra mettre A'C' en facteur commun, et, en observant que la moitié de chacune des perpendiculaires intermédiaires CC', DD', FF', est répétée deux fois, on trouvera en définitive :

$$A'AMBB' = \left\{ \frac{AA' + BB'}{2} + CC' + DD' + FF' \right\} \cdot A'C',$$

résultat qui nous apprend que, *pour évaluer l'aire d'un segment curviligne quelconque, il faut partager sa base en un nombre de parties égales d'autant plus grand que l'on voudra plus d'exactitude; élever aux différens points de division des perpendiculaires à cette base, puis ajouter à la demi-somme des deux perpendiculaires extrêmes toutes les perpendiculaires intermédiaires, et multiplier le résultat par la distance de deux points de division consécutifs.*

Cette règle comprend évidemment, comme cas particulier, celui où les deux extrémités de la courbe, ou l'une d'elles seulement, se trouveraient sur la base du segment : car alors il suffirait de regarder comme nulles les deux perpendiculaires extrêmes, ou seulement l'une d'elles.

PROBLÈME.

441. *Evaluer l'aire comprise entre deux lignes courbes*

et deux droites parallèles, ou enveloppée par une ligne courbe.

1.° Si l'on peut pénétrer dans l'intérieur de l'aire à mesurer,
Fig. 227. on tracera une perpendiculaire *af* aux deux parallèles AA' et FF'; on la divisera en un certain nombre de parties égales, et par tous les points de division l'on mènera des parallèles à AA'. De cette manière l'aire AF' sera partagée en un certain nombre de figures qu'on pourra regarder comme des trapèzes ayant tous pour hauteur commune la distance *ab* de deux points de division consécutifs; et, en évaluant les aires de ces différens trapèzes, on trouvera que leur somme, c'est-à-dire celle de AF', a pour mesure *le produit que l'on obtient en multipliant par la distance de deux parallèles consécutives la demi-somme des deux parallèles extrêmes augmentée de toutes les autres.*

Telle est la règle que l'on suit pour mesurer l'aire de la section horizontale faite dans la carène d'un vaisseau, ainsi que celle de la section verticale déterminée dans cette même carène par un plan parallèle au plan de symétrie du navire.

Si la surface à mesurer est terminée de toutes parts par une ligne courbe, on la partagera encore en trapèzes, en traçant dans son intérieur une ou plusieurs directrices: ainsi, dans le cas
Fig. 228. de la figure, on tirera une première directrice AB aux extrémités de laquelle on élèverait deux perpendiculaires AA' et BB'; on mènerait ensuite une seconde directrice CD perpendiculaire à BB', et en D une parallèle DD' à BB'. L'aire proposée se trouverait ainsi partagée en quatre parties AMA', A'AB'B, BB'DD' et DND', qu'on sait évaluer.

Remarquons que, si AB et CD avaient une commune mesure qui ne fût pas trop petite, on pourrait calculer directement l'aire A'ABD'DB'A', en portant cette commune mesure sur AB et sur CD, et élevant des perpendiculaires à ces lignes par les points de division (441).

2.° Si l'on ne peut pas pénétrer dans l'intérieur de l'aire à mesurer, on la renfermera dans un rectangle PQRS, dont deux côtés au moins soient tangens à la courbe BMB'N; puis on partagera les deux côtés PQ et RS en un même nombre de parties égales, et par les points de division l'on mènera des parallèles aux deux tangentes PS et QR. Il n'y aura plus qu'à mesurer les parties de ces parallèles comprises entre leur point de départ et l'arc de courbe correspondant, et l'on en déduira

facilement les longueurs des portions qui sont comprises dans la courbe, et par suite l'aire demandée.

442. La méthode que nous venons d'indiquer pour évaluer l'aire d'une portion de surface plane terminée en tout ou en *partie* par des lignes courbes, fournit un procédé très-simple pour tracer une courbe semblable à une courbe quelconque donnée. Pour cela on tire sur le plan de celle-ci une droite A'B'; Fig. 220.
puis, après avoir marqué sur la courbe les points qui paraissent les plus éloignés et les plus voisins de cette droite, que l'on nomme *maxima* ou *minima*, ainsi que ses *points d'inflexion*, c'est-à-dire ceux où sa courbure change de sens, on partage l'intervalle compris entre deux points consécutifs en parties très-petites, et l'on abaisse de tous les points de division des perpendiculaires sur A'B'. Cela fait, on prend sur une droite indéfinie des parties $a'c'$, $c'd'$, $d'f'$, $f'b'$, qui contiennent autant de parties de l'échelle qu'il y a d'unités dans les parties correspondantes de A'B', et l'on élève ensuite aux différens points $a, b, c, \ldots$ des perpendiculaires aa', bb', $c'c \ldots$ qui contiennent autant de parties de l'échelle que leurs correspondantes AA', BB', CC'..... contiennent d'unités linéaires. Alors le polygone rectiligne $a'acdfbb'$ sera semblable au polygone rectiligne A'ACDFBB' (340, 2.e cas) : car chacun des quadrilatères du premier sera semblable au quadrilatère correspondant du second (336); et, de plus, ils seront semblablement placés. Si donc on joint les points a, c, d, f, b, par un trait continu, la courbe $acdfb$ sera d'autant plus exactement semblable à ACDFB, que les sommets A, C, D, F, B, seront plus rapprochés.

S'il s'agissait d'une courbe telle que celle de la figure 228, on dessinerait d'abord les parties ABD' et A'B'D, et ensuite les parties restantes AMA' et DND', en prenant d'abord AB et CD, puis AA' et DD' pour directrices.

Cette méthode peut être employée dans une foule de circonstances. Par exemple, veut-on approfondir un port, on conçoit qu'on a alors besoin de connaître la figure de son fond. Pour cela on partage la surface du port par deux séries de lignes horizontales parallèles et équidistantes; et, au moyen d'une sonde, on mesure les distances de tous les points de section de ces différentes lignes au fond du port. On pourra donc ainsi rapporter sur le papier la courbe résultant de l'intersection de

ce fond avec le plan vertical conduit par chaque horizontale, et acquérir une idée d'autant plus exacte de sa figure que ces sections seront plus rapprochées.

PROBLÈME.

443. *Deux propriétés sont séparées par la ligne ondulée*
Fig. 229. ABCD, *et limitées par les deux droites* XX' *et* YY' : *on propose de remplacer cette ligne par une droite sans altérer en rien les superficies des deux propriétés.*

J'élève au point A sur XX' la perpendiculaire AG, et je mesure les segmens ABE, FDG et ECF : la propriété XABCDY sera ainsi augmentée des deux premiers segmens, et diminuée du troisième; si donc l'aire de celui-ci est égale à la somme de celles des deux autres, la droite AG résoudra le problème. Mais si l'on a ABE + FDG > ECF, on prendra sur AX une distance AI égale au quotient que l'on obtient en divisant par $\frac{AG}{2}$ l'excès de ABE + FDG sur ECF; et, comme l'aire du triangle AIG, formé en joignant IG, sera précisément égale à cet excès, puisque $AI \cdot \frac{AG}{2} = ABE + FDG - ECF$, la droite IG sera évidemment la nouvelle limite : car elle retranchera de XAGY une quantité précisément égale à l'aire dont elle était trop grande.

Cette solution est remarquable, comme l'observe M. Puissant dans son *Traité de Géodésie*, par son extrême simplicité, et parce qu'elle est indépendante de la connaissance des deux aires contiguës.

CHAPITRE VI.

COMPARAISON DES AIRES.

THÉORÈME.

Fig. 230. 444. *Le carré* BO *construit sur l'hypothénuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC, *est équivalent à la somme des carrés* AD *et* AF *construits sur les deux autres côtés de ce triangle.*

Abaissons du sommet A de l'angle droit la perpendiculaire AI sur l'hypothénuse, et prolongeons-la jusqu'au côté opposé du carré BO : nous partagerons ainsi ce carré en deux rectangles BL et CL que je dis être équivalens aux carrés correspondans AF et AD. Pour le démontrer, je joins AK et FC, et je forme ainsi les deux triangles FBC et ABK qui sont les moitiés respectives de AF et de BL : car le triangle FBC, par exemple, a la même base FB et la même hauteur AB que le carré AF. Or ces deux triangles sont égaux : en effet l'angle FBC, composé de l'angle ABC et du droit FBA, est égal à l'angle ABK composé du même angle ABC et du droit CBK. De plus les deux côtés FB et BC qui comprennent l'angle FBC sont égaux chacun à chacun aux côtés AB et BK qui comprennent l'angle ABK : donc les triangles FBC et ABK sont égaux, c'est-à-dire que la moitié du carré AF est égale à celle du rectangle BL ; donc ce carré et ce rectangle sont équivalens. On prouverait de la même manière que le carré AD et le rectangle CL sont aussi équivalens : donc le carré BO, somme des deux rectangles BL et CL, est aussi la somme des deux carrés AF et AD.

445. Corollaire i. Les deux rectangles BL, CL, et le carré BO, ayant même hauteur IL, sont proportionnels à leurs bases (410) : ainsi l'on aura la suite de rapports égaux

BL ou AF : BI :: CL ou AD : IC :: BO : BC,

c'est-à-dire que *les carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypothénuse.*

446. Corollaire ii. *Les carrés faits sur les cordes qui partent des extrémités d'un même diamètre sont proportionnels aux projections de ces cordes sur ce diamètre :* car le rapport du carré de chaque corde AB à sa projection BI sur le diamètre BC, est égal (445) au rapport du carré de ce diamètre à ce même diamètre, et ainsi ce rapport est constant.

447. Scholie. On aurait pu déduire le théorème qui précède, et ses deux corollaires, de celui du n.º 301, 4.º et 5.º, et du corollaire iii (305) : car, l'aire du carré construit sur une droite ayant pour mesure le carré du nombre abstrait qui exprime la longueur de cette droite (414), on voit que dire, par exemple, que le carré de la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres

côtés de ce triangle, revient à cette proposition : **Le carré construit sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, etc.**

En général on pourra substituer aux expressions carré de la longueur d'une ligne et produit des longueurs de deux lignes, les expressions respectives carré construit sur cette ligne et rectangle construit sur ces deux lignes : ainsi, par exemple, ce théorème d'algèbre, que *le carré de la somme ou de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres augmentée ou diminuée de leur double produit*, revient à ce théorème de géométrie : *Le carré construit sur la somme ou la différence de deux droites est équivalent à la somme des carrés construits sur ces deux droites augmentée ou diminuée du double du rectangle qui aurait l'une d'elles pour base et l'autre pour hauteur* (*a*).

Fig. 231. (*a*) 1.° Sur la droite AC, somme des deux lignes données AB et BC, construisez le carré ACDF; prenez AG = AB, et par les points B et G menez les droites BL et GI parallèles à AF et à AC. De cette manière le carré AD sera la somme des quatre figures AK, DK, FK et CK. La première est le carré construit sur AB (231); la seconde est un carré dont le côté est égal à BC : car la figure KD a ses quatre angles droits, le côté KI = BC (224); LK, qui est égal à FG, différence de AF et de AG, est ainsi égal à BC, différence des lignes AC et AB égales à celles-ci; enfin les dimensions des rectangles FK et CK sont évidemment AB et BC.

Fig. 232. 2.° Sur AB, la plus grande des deux lignes données AB et BC, construisons le carré AD; prenons AG égal à la différence AC de ces deux lignes, et menons par les points C et G les parallèles CM et GK à AF et à AB. Enfin construisons sur FG le carré GL. La figure totale ABDLIG est la somme des carrés construits sur AB et sur BC : car FG, différence des lignes AF et AG ou AB et AC, est ainsi égale à BC. Or, si l'on retranche de cette figure les deux rectangles BM et IM qui ont pour dimensions AB et BC, puisque IK = IG + GK = BC + AC = AB, il restera le carré AK construit sur la différence des deux lignes AB et BC.

On a donc $(AB \pm BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2AB \cdot BC$, le signe supérieur se rapportant à la figure 231 et l'inférieur à la figure 232.

On peut encore démontrer de la manière suivante ce théorème : *Le rectangle* AG, *qui a pour base la somme et pour hauteur la différence des deux*
Fig. 233. *lignes* AB *et* BC, *est équivalent à la différence des carrés construits sur ces deux lignes*, ce qui revient à dire que *la différence des carrés de deux nombres est égale à la somme de ces nombres multipliée par leur différence.*

En effet, construisez sur la plus grande des deux droites le carré AI; puis, ayant pris BD = BC, menez DML parallèle à AK. Il est clair que MI est le carré construit sur BC : car, comme AF est, par hypothèse, la différence des deux droites AB et BC, et que AK est égal à AB, il faut nécessairement que

PROBLÈME.

448. *Construire un carré qui soit équivalent à la somme de plusieurs carrés donnés.*

Pour additionner les deux premiers carrés, construisez un triangle rectangle OAB dont les deux côtés de l'angle droit soient égaux aux côtés a et b de ces carrés, et il est clair que le carré construit sur son hypothénuse AB sera la somme de ces deux-là. Pour additionner à cette somme le troisième carré, on élèvera au point B une perpendiculaire $BC = c$, on joindra AC, et le carré fait sur AC sera la somme des trois premiers carrés, et ainsi de suite. Fig. 254.

PROBLÈME.

449. *Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés.*

Construisez un triangle rectangle dont l'hypothénuse AO et un des côtés OB de l'angle droit soient égaux aux côtés a et b de ces deux carrés, et le carré construit sur le troisième côté AB de ce triangle résoudra le problème. Fig. 255.

PROBLÈME.

450. *Construire un carré qui soit à un carré donné a^2 comme une ligne donnée m est à une autre ligne donnée n,* c'est-à-dire qui soit tel qu'en représentant son côté par x, on ait la proportion

$$x^2 : a^2 :: m : n.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle étant proportionnels à leurs projections sur l'hypothénuse (445), je prends sur une droite indéfinie deux parties OM et ON respectivement égales à m et à n, je décris sur MN comme diamètre une demi-circonférence, j'élève au point O la perpendiculaire OP sur MN, et je joins PM et PN, ce qui forme le triangle rectangle PMN. Si donc PN était égale au côté a du Fig. 256.

$KF = BC$; or la différence des deux carrés AI et MI, construits respectivement sur AB et BC, est la figure ABNMLK équivalente au rectangle AG : car ces deux figures ont la partie commune ABNF, et les deux parties restantes MK et NC sont deux rectangles qui ont leurs bases et leurs hauteurs égales. Donc $(AB + BC)\cdot(AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

carré donné, PM serait le côté du carré demandé. S'il n'en est pas ainsi, je prends sur PN, prolongé s'il est nécessaire, la partie PA $=a$ (remarquez que dans la proportion demandée $x^2 : a^2 :: m : n$, le carré a^2 doit correspondre à la ligne n), je mène AX parallèle à MN, et je dis que la droite PX résout le problème. En effet on a évidemment:

$$PX : PA \text{ ou } a :: PM : PN,$$

et par conséquent

$$\overline{PX}^2 : a^2 :: \overline{PM}^2 : \overline{PN}^2.$$

Mais le triangle rectangle PMN donne:

$$\overline{PM}^2 : \overline{PN}^2 :: MO \text{ ou } m : NO \text{ ou } n;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$\overline{PX}^2 : a^2 :: m : n.$$

451. Si l'on demandait un carré qui fût une certaine fraction, par exemple, les $\frac{3}{5}$ du carré a^2, il est évident que ce problème étant un cas particulier du précédent, pourrait se résoudre de la même manière, en ayant soin seulement de prendre OM et ON égales respectivement à trois fois et à cinq fois une grandeur arbitraire; mais on arrivera *plus directement* au but de la manière suivante.

Fig. 237. On décrira une demi-circonférence sur OA, côté du carré donné; puis, ayant partagé ce côté en cinq parties égales, on élèvera une perpendiculaire BX au troisième point B de division, on joindra OX, et cette droite sera le côté du carré demandé. En effet le carré d'une corde est au carré du diamètre comme la projection de cette corde est au diamètre (305 et 446): donc

$$\overline{OX}^2 : \overline{OA}^2 :: OB : OA.$$

Mais OB est les $\frac{3}{5}$ de OA: donc aussi le carré construit *sur OX* est les $\frac{3}{5}$ de celui fait sur OA.

452. Si le carré demandé devait être, par exemple, les $\frac{5}{3}$ du
Fig. 258. carré a^2, on diviserait encore le côté OA de ce carré en trois parties égales; mais on le prolongerait d'une quantité AB égale à deux de ces parties, de sorte que, OB étant ainsi les $\frac{5}{3}$ de OA$=a$, le carré fait sur OB sera les $\frac{25}{9}$ du carré a^2. Si donc on cherche, comme précédemment, le côté OX d'un carré qui soit les $\frac{3}{5}$ de celui construit sur OB, on aura résolu le problème: car les $\frac{3}{5}$ des $\frac{25}{9}$ du carré a^2 sont les $\frac{25 \cdot 3}{9 \cdot 5}$ ou les $\frac{5}{3}$ de ce carré.

PROBLÈME.

453. *Trouver une droite x qui soit à une droite donnée a, comme un carré donné m^2 est à un autre carré donné n^2*, c'est-à-dire telle que l'on ait la proportion

$$x : a :: m^2 : n^2.$$

En s'appuyant toujours sur ce principe, que les carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypothénuse, on tracera deux droites à angles droits sur lesquelles on prendra des distances OM et ON respectivement égales aux côtés des carrés données m^2 et n^2; puis, joignant MN et abaissant du sommet O la perpendiculaire OP sur MN, on aura la proportion Fig. 239.

$$\overline{OM}^2 \text{ ou } m^2 : \overline{ON}^2 \text{ ou } n^2 :: MP : NP.$$

Si donc NP était égale à a, MP résoudrait le problème. S'il n'en est pas ainsi, on prendra sur PN une distance $PA = a$ (remarquez que, dans la proportion demandée, a doit correspondre à n^2); puis on mènera AA' parallèle à OP jusqu'à la rencontre de ON, et ensuite A'X parallèle à MN. Il est facile de voir que QX sera la ligne demandée.

454. SCHOLIE. Si l'on demandait seulement le rapport des deux carrés m^2 et n^2, il n'y aurait qu'à chercher une troisième proportionnelle x aux deux côtés m et n de ces carrés, et le rapport de m à x serait celui même de m^2 à n^2, comme il est facile de le voir.

THÉORÈME.

455. *Les aires de deux triangles* ABC, ADF, *qui ont un angle commun* A, *sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent dans chacun l'angle commun*, c'est-à-dire qu'on aura: Fig. 240.

$$ABC : ADF :: AB \cdot AC : AD \cdot AF.$$

Joignons, en effet, DC. Les deux triangles ABC et ADC, qui ont leurs bases AB et AD en ligne droite et leurs sommets au point C, ont par conséquent même hauteur, et sont ainsi entre eux comme leurs bases AB et AD (420) : donc

$$ABC : ADC :: AB : AD \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

De même les triangles ADC et ADF donneront la proportion

$$ADC : ADF :: AC : AF \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant le facteur ADC commun aux deux termes du premier rapport de la proportion-produit, il viendra

$$ABC : ADF :: AB \cdot AC : AD \cdot AF,$$

ce qu'il fallait démontrer.

456. Corollaire. Pour que les triangles ABC et ADF soient équivalens, il faut que les deux termes du second rapport soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait la proportion (Arith., 214)

$$AB : AD :: AF : AC,$$

ou, ce qui revient au même, que la ligne BF soit parallèle à DC (279).

THÉORÈME.

457. *Les aires de deux triangles semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.*

Fig. 146. Abaissons des sommets homologues A et A' des perpendiculaires AI et A'I' sur les côtés opposés à ces angles. Les triangles rectangles ABI et A'B'I' sont semblables : car les angles B et B' sont supposés égaux (332); leurs côtés homologues sont donc proportionnels, et l'on a :

$$AI : A'I' :: AB : A'B'.$$

Mais la similitude des triangles proposés donne aussi :

$$BC : B'C' :: AB : A'B'.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et divisant par 2 les deux termes du premier rapport de la proportion-produit, il viendra

$$\tfrac{1}{2} BC \cdot AI : \tfrac{1}{2} B'C' \cdot A'I' :: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2,$$

ce qui démontre notre théorème (419).

Observons que nous avons bien exprimé que les deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables (352) : car nous avons écrit qu'ils avaient un angle égal compris entre côtés proportionnels.

THÉORÈME.

458. *Les aires des polygones semblables sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues de ces polygones.*

Nous pourrons partager les deux polygones dont il s'agit en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés (339), puis former autant de proportions, en exprimant que chacun des triangles du premier po-

lygone est à celui qui lui correspond dans le second, comme le carré d'un de ses côtés est au carré du côté homologue de l'autre triangle (457) : ainsi

$$DBC : D'B'C' :: \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2,$$ Fig. 241.

$$ABD : A'B'D' :: \overline{AD}^2 : \overline{A'D'}^2,$$

$$EAD : E'A'D' :: \overline{EA}^2 : \overline{E'A'}^2,$$

$$EAG : E'A'G' :: \overline{GE}^2 : \overline{G'E'}^2,$$

$$GEF : G'E'F' :: \overline{GF}^2 : \overline{G'F'}^2.$$

Mais, les polygones étant semblables, leurs côtés et leurs diagonales homologues (334), et partant les carrés de ces côtés et de ces diagonales, sont proportionnels ; donc les seconds rapports de toutes nos proportions sont égaux : car ils sont formés de carrés de côtés ou de diagonales homologues des deux polygones ; les premiers rapports sont donc aussi égaux ; donc on aura la suite de rapports égaux

$$DBC : D'B'C' :: ABD : A'B'D' :: EAD : E'A'D' :: EAG : E'A'G' :: GEF : G'E'F',$$

dont les antécédens sont les triangles du premier polygone, et dont les conséquens sont les triangles correspondans du second ; donc la somme de tous ces antécédens, c'est-à-dire l'aire du premier polygone ABCDEFG, est à la somme de tous ces conséquens, c'est-à-dire à l'aire du second A'B'C'D'E'F'G', comme un quelconque GEF des triangles du premier, est au triangle semblable G'E'F' du second, ou comme le carré de l'un quelconque des côtés GF du premier est au carré du côté homologue G'F' du second.

459. Corollaire i. Il suit de là que, *si l'on construit trois polygones semblables sur les côtés d'un triangle rectangle, le polygone correspondant à l'hypothénuse sera équivalent à la somme des deux autres.* En désignant, en effet, par a l'hypothénuse de ce triangle rectangle, par b et c les deux autres côtés, par A, B, C, les aires des polygones construits respectivement sur a, b, c, on a, par le théorème précédent :

$$B : b^2 :: C : c^2 :: A : a^2 ;$$

donc, en vertu du n.º 221 de l'Arithmétique,

$$B + C : b^2 + c^2 :: A : a^2.$$

Mais les deux conséquens de cette proportion sont égaux (444) : donc il en est de même des deux antécédens ; donc $A = B + C$.

460. Corollaire ii. Si, *étant donnés deux polygones sem-*

blables, on propose de construire un troisième polygone qui leur soit semblable, et dont l'aire soit la somme ou la différence des aires de ces deux polygones, on cherchera le côté d'un carré qui soit égal à la somme ou à la différence des carrés faits sur deux côtés homologues des polygones donnés, et l'on aura le côté qui, dans le polygone demandé, doit être homologue à ces deux côtés-là, de sorte que le problème sera alors ramené à celui du n.º 355.

THÉORÈME.

461. *Les aires des polygones réguliers semblables sont proportionnelles aux carrés des rayons des cercles qui leur sont inscrits ou circonscrits.*

En effet les aires de ces polygones sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues (458); mais ces côtés sont proportionnels aux rayons des cercles inscrits ou circonscrits (391, 2.º), et par conséquent les carrés de ces côtés sont proportionnels aux carrés de ces rayons : donc aussi les aires des polygones réguliers semblables, etc.

THÉORÈME.

462. *Les aires des cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

Désignons, en effet, par R et par R' les longueurs des rayons de deux cercles. Leurs aires, étant représentées par $\pi \cdot R^2$ et par $\pi \cdot R'^2$ (432), seront entre elles dans le rapport de ces deux nombres, et par conséquent dans celui de R^2 à R'^2.

463. Corollaire I. *Si l'on décrit trois demi-circonférences*
Fig. 242. *sur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC, *l'aire de ce triangle sera égale à la somme de celles des deux* lunules AMBN et APCQ.

En effet on verra, comme au n.º 459, que le demi-cercle BMAPC est équivalent à la somme des deux autres BNA et AQC. Mais, en retranchant d'une part les deux segmens AMB et APC, il restera le triangle ABC; et en retranchant de l'autre part les mêmes segmens, il reste les deux lunules : donc, etc.

464. Corollaire II. *Les aires de deux secteurs semblables* (330) *sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

Soient, en effet, S et S' les aires de ces deux secteurs; a et a' les arcs qui leur servent de base; et R et R' les rayons des cercles dont ils font partie. On aura, d'après le n.º 434 :

$$S : S' :: a \cdot R : a' \cdot R'.$$

Mais, puisque les secteurs sont semblables, leurs arcs le sont aussi (330); donc on aura (402) :

$$a : a' :: R : R'.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et simplifiant, il viendra :

$$S : S' :: R^2 : R'^2.$$

465. Corollaire III. *Les aires de deux segmens semblables* (330) BAC *et* B'A'C', *sont proportionnelles aux carrés des rayons des cercles dont ils font partie.* Fig. 211.

En effet les deux secteurs OBAC et O'B'A'C' sont semblables (330); donc on a (464) :

$$OBAC : O'B'A'C' :: \overline{OC}^2 : \overline{O'C'}^2.$$

Mais les triangles COB et C'O'B' sont aussi semblables (352): donc (457)

$$COB : C'O'B' :: \overline{OC}^2 : \overline{O'C'}^2;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$OBAC : O'B'A'C' :: COB : C'O'B';$$

d'où, *dividendo*,

$$OBAC - COB : O'B'A'C' - C'O'B' :: OBAC : O'B'A'C' \text{ ou } :: \overline{OC}^2 : \overline{O'C'}^2,$$

c'est-à-dire,

$$BAC : B'A'C' :: \overline{OC}^2 : \overline{O'C'}^2.$$

THÉORÈME.

466. *Les aires* S *et* s *de deux figures semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons vecteurs homologues.* Fig. 172.

Supposons, en effet, qu'à partir de deux rayons vecteurs homologues OA, oa, on ait partagé tout l'espace angulaire autour des centres de similitude O et o, en un nombre quelconque n de parties égales, et qu'on ait joint deux à deux les points de division des deux courbes ABCK et $abck$: on aura ainsi formé deux polygones semblables P et p (352 et 340), dont les aires seront proportionnelles aux carrés des deux rayons

vecteurs homologues OA et oa (démonstration du n.° 458); ainsi

$$P : p :: \overline{OA}^2 : \overline{oa}^2.$$

Or cette proportion est vraie quelle que soit la grandeur du nombre n : donc elle le sera encore quand ce nombre sera infini. Mais alors les polygones P et p seront devenus les deux figures S et s; donc on aura :

$$S : s :: \overline{OA}^2 : \overline{oa}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈME.

467. *Construire un cercle équivalent à la couronne comprise entre deux circonférences concentriques, et calculer*
Fig. 209. *son aire en fonction des rayons* R *et* r *de ces deux circonférences.*

La première partie du problème consiste à décrire un cercle qui soit la différence de deux autres : donc, en vertu du théorème du n.° 462, il s'agira de trouver le côté d'un carré qui soit la différence des carrés faits sur les rayons des deux circonférences données, et l'on aura le rayon du cercle demandé. En conséquence on mènera une tangente AC en un point quelconque de la plus petite circonférence, et AC sera le rayon du cercle inconnu (449).

Il suit de cette construction, que l'aire du cercle demandé aura pour mesure $\pi \cdot \overline{AC}^2$. Mais AC est moyenne proportionnelle entre MC et CN (297); or MC est la différence $(R-r)$ des deux rayons, CN est leur somme $(R+r)$: donc $\overline{AC}^2 = (R-r) \cdot (R+r)$; donc l'aire demandée sera

$$\pi \cdot (R-r) \cdot (R+r),$$

formule calculable par logarithmes.

PROBLÈME.

Fig. 245. 468. *Partager une figure quelconque* ABCDF *en cinq parties équivalentes par des courbes semblables qui aient le même centre* O *de similitude qu'elle.*

Les quatre courbes à décrire doivent diviser la figure ABCDF en parties qui soient respectivement $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$ de l'aire donnée: par conséquent les carrés construits sur leurs rayons vecteurs

omologues à OA seront $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$ du carré fait sur celui-i (466). En conséquence je décris sur OA comme diamètre une emi-circonférence; puis, ayant partagé cette droite en cinq arties égales, j'élève des perpendiculaires aux différens points e division, et je joins leurs extrémités au point O; et, en dérivant des courbes semblables à ABCDF (326), dont les rap-orts de similitude soient respectivement $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OA''}{OA}$, $\frac{OA'''}{OA}$ et $\frac{OA^{IV}}{OA}$, e problème sera résolu (446).

PROBLÈME.

469. *Construire un polygone semblable au polygone* ABCDF, *et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données m et n.* Fig. 244.

Puisque le polygone demandé doit être semblable à ABCDF, leurs aires seront proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues; mais, comme, d'une autre part, ces aires doivent aussi être proportionnelles aux droites m et n, on voit que les carrés de ces côtés homologues seront entre eux comme m est à n : ainsi, pour avoir le côté qui, dans le polygone demandé, sera homologue à AB, il faudra chercher le côté d'un carré qui soit au carré fait sur AB comme m est à n. On pourrait résoudre ce problème par la construction donnée au n.º 450; mais il sera plus simple d'imiter la construction donnée au n.º 451 ou 452. En conséquence on cherchera une quatrième proportionnelle AG aux trois lignes n, m et AB; puis, ayant décrit une demi-circonférence sur la plus grande des deux lignes AG et AB, on élèvera à l'extrémité de la plus petite une perpendiculaire, et l'on tirera la corde AI : cette corde sera le côté du carré demandé. On la rabattra donc en AB' sur AB, et il ne s'agira plus que de construire sur AB' un polygone semblable à ABCDF. Pour cela on partagera le polygone ABCDF en triangles par des diagonales issues du sommet A, si la chose est possible; puis on mènera successivement B'C', parallèle à BC; C'D', parallèle à CD; D'F', parallèle à DF; et le polygone AB'C'D'F' résoudra le problème : car d'abord il est semblable à ABCDF (340), ensuite leurs aires sont entre elles comme $\overline{AB'}^2$ est à $\overline{AB}^2$, par conséquent comme AG : AB, ou comme AM $=m$: AN $=n$.

PROBLÈME.

Fig. 245. 470. *Un polygone* ABCDF *étant donné, construire quatre polygones qui lui soient semblables, dont les aires soient proportionnelles à quatre lignes données m, n, p, q, et telles que leur somme soit égale à celle du polygone* ABCDF.

Partagez l'un quelconque AB des côtés du polygone en parties AM, MN, NP, PB, proportionnelles aux quatre droites données *m, n, p, q*; reportez les parties intermédiaires MN et NP de A en N' et en P'; puis, ayant décrit une demi-circonférence sur AB, élevez aux points M, N', P' et P des perpendiculaires MB', N'B'', P'B''' et PB^{IV} sur AB, et joignez AB', AB'', AB''' AB^{IV}. Ces cordes seront les côtés qui, dans les polygones demandés, seront homologues à AB : car les carrés de ces cordes sont proportionnels à leurs projections AM, AN', AP' et BP, et par conséquent aux lignes *m, n, p, q*; et, la somme de ces projections étant AB, la somme de ces carrés sera $\overline{AB}^2$: donc aussi les aires des quatre polygones seront proportionnelles aux lignes *m, n, p, q*, et leur somme sera celle même du polygone ABCDF.

PROBLÈME.

Fig. 246. 471. *Transformer le polygone* ABCD *en un autre qui soit semblable au polygone* FGIKL.

Désignons, pour abréger, par P et Q les aires respectives de nos deux polygones, et par x le côté homologue à FG dans le polygone inconnu. Puisque ce polygone doit être semblable à FGIKL, on aura :

$$Q : P :: \overline{FG}^2 : x^2.$$

Cela posé, on transformera les polygones Q et P chacun en un carré, et, en désignant par q et par p les côtés de ces carrés, la proportion précédente deviendra :

$$q^2 : p^2 :: \overline{FG}^2 : x^2,$$

de laquelle on tire (Arith., n.º 224) :

$$q : p :: FG : x.$$

Ainsi, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues q, p et FG, on aura le côté qui, dans le polygone demandé, doit être homologue à FG. Il sera facile ensuite de construire ce polygone.

472. COROLLAIRE. Le problème que nous venons de résoudre

donne le moyen de transformer un polygone irrégulier quelconque en un des polygones réguliers que nous savons inscrire dans la circonférence : car il suffira évidemment de construire d'abord un polygone régulier qui ait le nombre de côtés demandé ; puis de transformer le polygone irrégulier en un autre qui soit semblable au nouveau polygone.

PROBLÈME.

473. *Etant données trois droites* B'B'', BC *et* C'C'', *telles que la seconde coupe les deux autres, mener une droite* MN *parallèle à* BC, *de manière que l'aire du trapèze* BN *soit égale à celle d'un carré donné* m^2. Fig. 247.

Je cherche une troisième proportionnelle aux deux lignes $\frac{BC}{2}$ et m, et je mène à BC une parallèle DK qui en soit distante d'une quantité égale à cette troisième proportionnelle. Il est clair que le triangle BDC est équivalent au carré m^2.

Cela posé, puisque le trapèze BN est supposé équivalent au triangle BDC, les deux triangles MDC et MNC sont nécessairement équivalens : donc DN est parallèle à MC ; et, comme MN l'est déja à BC, nous aurons cette suite de rapports égaux :

$$BC : MN :: AC : AN :: AM : AD :: MN : DK.$$

Ainsi l'on aura MN en prenant une moyenne proportionnelle entre BC et DK, et il ne s'agira plus que d'inscrire entre B'B'' et C'C'' une droite qui soit égale à cette moyenne proportionnelle, et parallèle à BC.

PROBLÈME.

474. *Partager le quadrilatère* ABCD *en deux parties proportionnelles aux deux droites données m et n, par une parallèle au côté* AB. Fig. 248.

Je transforme ce quadrilatère en un triangle ABI, et je partage celui-ci en deux parties ABO et OBI proportionnelles à m et à n (420). Il ne s'agira plus alors que de retrancher de l'espace DABC un trapèze AN qui soit équivalent au triangle ABO.

PROBLÈME.

475. *Partager le quadrilatère* ABCD *en deux parties proportionnelles à deux lignes données m et n, par une perpendiculaire au côté* AB. Fig. 249.

Je transforme ABCD en un triangle ADI, dont la base soit dirigée suivant AB, et je divise ce triangle en deux parties ADO et ODI proportionnelles à m et à n. Si le point O tombe à droite ou à gauche de la perpendiculaire DF, retranchez de CDFB ou de DFA, par une parallèle à DF, une aire égale au triangle DFO, et le problème sera résolu.

Si les angles A et B sont aigus, le problème est toujours possible; mais si A est obtus, il faut que la $\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\text{ème}}$ partie du
Fig. 250. quadrilatère ne soit pas moindre que le triangle DAK. Si elle lui est équivalente, la droite AK résout le problème, et alors OK est parallèle à DA. Ainsi donc menez par le point K une parallèle à DA; et si le point O est à gauche de cette droite, le problème est impossible; sinon, il est toujours possible: car alors la parallèle qui retranchera de CDFB une aire égale à celle du triangle DFO, devra être tracée à droite de A.

PROBLÈME.

Fig. 251. 476. *Etant donné un polygone quelconque* ABCDEFG, *mener à une droite donnée une parallèle qui partage ce polygone en deux parties proportionnelles à deux droites données* m *et* n.

Nous pourrons toujours supposer la droite donnée menée par un des sommets du polygone. Soit AO cette droite. Je transforme les deux parties dans lesquelles elle partage le polygone, en deux triangles OAY et OAZ qui aient OA pour base commune; puis je divise ZY en parties proportionnelles à m et à n, au point X; je joins AX, et les deux triangles AXY et AXZ, qui ont le même sommet A, et leurs bases XY et XZ sur une même ligne droite, sont entre eux comme ces bases, et par conséquent dans le rapport de m à n: de sorte que si le point X est sur OA, cette droite résoudra le problème. S'il est au dessus ou au dessous de cette droite, il n'y aura qu'à retrancher de DOAB ou de EOAG une partie équivalente au triangle OAX par une parallèle à AO (473).

Cette solution renferme implicitement le moyen de partager un polygone en parties proportionnelles à tant de quantités, données m, n, p, q, que l'on voudra, par des droites qui soient toutes parallèles entre elles: car il suffira de le partager successivement en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de m à $n+p+q$, de $m+n$ à $p+q$, de $m+n+p$ à q.

477. Lorsque le polygone que l'on veut partager en parties équivalentes ou en parties qui aient entre elles des rapports donnés a un grand nombre de côtés, la méthode du n.° 276 devient très-laborieuse, et peut en conséquence entraîner dans de nombreuses erreurs : on a alors recours au calcul, et de la manière suivante.

Supposons que l'on veuille partager un polygone en quatre parties proportionnelles aux nombres 2, 3, 5 et 8, par des lignes issues d'un point O donné dans l'intérieur du polygone. Fig. 223.

On commencera par lever le plan ABCDFGIK de ce polygone, et par mesurer son aire; et je suppose que l'on ait trouvé $2032^{m.q},58$ (438) : on verra facilement (Arithmétique, page 170) que les quatre parties demandées seront respectivement de 225,84; 338,76; 564,61 et 903,37 mètres carrés. Soit O le point du plan d'où l'on doit mener les lignes de division : j'abaisse de ce point une perpendiculaire OL sur AK; et, en mesurant ces deux lignes, je trouve qu'elles valent 16^m et $25^m,53$; de sorte que le triangle OAK égale $25,53 \cdot 8 = 204^{m.q},24$, quantité inférieure de $21^{m.q},60$ à la première partie. Ainsi il faudra ajouter à OAK un triangle dont le sommet soit en O, et dont la base, dirigée suivant IK, soit telle que l'aire de ce triangle vaille $21^{m.q},60$. On aura évidemment la mesure de cette base en divisant 21,60 par la moitié de la perpendiculaire OM, laquelle vaut $16^m,1$; le quotient est $2^m,68$: ainsi on prendra $KN = 2^m,68$, on tirera ON, et le quadrilatère OAKN sera la première partie.

En mesurant KI, on trouve que cette ligne vaut $64^m,59$; de sorte que $NI = 64^m,59 - 2^m,68 = 61^m,91$: donc l'aire du triangle ONI est égale à $61,91 \cdot 8,05$, ou $498^{m.q},37$. Ainsi il surpasse la seconde partie de $498^{m.q},37 - 338^{m.q},76 = 159^{m.q},61$. Je cherche donc la base d'un triangle qui, ayant OM pour hauteur, ait pour surface $159^{m.q},61$; et pour cela je divise 159,61 par $\frac{16,1}{2}$, ce qui donne pour quotient $19^m,83$. Je prends donc $IP = 19^m,83$, je joins OP, et le triangle ONP est la seconde partie. Le triangle OPI est inférieur à la troisième de $564^{m.q},61 - 159^{m.q},61 = 405^{m.q}$. Voyons donc si l'aire du triangle OIG est égale à cette quantité. Or, dans le cas particulier de notre figure, où le point O est supposé sur la directrice AI, nous aurons facilement cette aire : car, en mesurant AO, on trouve $AO = 22^m,63$, et la directrice AI ayant 80^m (438), on en conclut immédiatement que $OI = 57^m,37$; et, comme $G'D' = 11^m$, on voit que $OGI = \frac{57,37 \cdot 11}{2} = 315^{m.q},55$, quantité inférieure à $405^{m.q}$ de $89^{m.q},47$. J'abaisse donc sur GF,

une perpendiculaire OQ, que je trouve de $29^{m},6$, et je cherche une quantité qui, multipliée par $\frac{29,6}{2} = 14,8$, donne pour produit $89^{m.q},47$, c'est-à-dire que je divise 89,47 par 14,8. Le quotient est 6,05 : je prends donc $GR = 6^{m},05$, je tire OR, et le triangle OGR vaut ainsi $89^{m.q},47$; de sorte que le pentagone OPIGR, valant $159^{m.q},61 + 315^{m.q},53 + 89^{m.q},47 = 564^{m.q},61$, est ainsi la troisième partie demandée. Par conséquent le polygone ORFDCBA est la quatrième.

Pour vérifier notre opération, il n'y a qu'à mesurer cette quatrième partie, et voir si son aire est effectivement de $903^{m.q},37$.

Il sera facile de tracer les lignes de division sur le terrain, puisque les points où elles coupent les côtés homologues à KI et à FG sont déterminés, et qu'elles doivent d'ailleurs passer par le point donné.

478. On peut de même combiner utilement la méthode *précédente* et les constructions géométriques pour résoudre le problème de partager un polygone en parties proportionnelles à *des* nombres donnés, par une série de droites dont les directions seraient données (476).

Fig. 252. On commencera par lever le plan ABCDEFGI du polygone, et par mesurer son aire. Supposons qu'on l'ait trouvée de $6^{m.q},69$, et qu'on veuille partager le polygone en trois parties équivalentes par des perpendiculaires au côté homologue à AB : chacune de ces parties vaudra donc $2^{m.q},23$. Alors on élèvera au point A la perpendiculaire AK, et l'on mesurera le quadrilatère AKGI. Si le plan a été levé en partageant le polygone en triangles par des diagonales issues du point F, il n'y aura qu'à mesurer $AK = 2,46$, et $FK = 1,87$, évaluer l'aire du triangle AFK, et la retrancher de celle du quadrilatère AFGI. On trouvera ainsi que $AKGI = 0^{m.q},47$, quantité inférieure à $2^{m.q},23$ de $1^{m.q},76$. *En divisant* ce nombre par $\frac{AK}{2}$, c'est-à-dire par 1,23, et prenant $AL = 1,^{m}43$, quotient de cette division, on aura, en joignant KL, un triangle AKL dont l'aire sera égale à $1^{m.q},76$; de sorte que, pour avoir la première ligne de division MN, il suffira de mener à AK une parallèle qui retranche de l'espace FKAL une aire équivalente à ce triangle, problème que nous savons résoudre (473). On aura une vérification en mesurant MN, et voyant si cette mesure est effectivement une moyenne proportionnelle entre les longueurs de LH et de AK.

Il s'agit actuellement de retrancher de MBCDEFN une aire égale à 2$^{m.q}$,23, ce qui ne saurait présenter de difficulté d'après ce qui précède.

Cette méthode s'appliquerait très-bien au cas où l'aire à partager serait terminée de toutes parts par une ligne courbe. Dans ce cas on en lèverait le plan en prenant une directrice perpendiculaire à la direction que devraient avoir les lignes de division; et en regardant comme des lignes droites les arcs interceptés entre deux perpendiculaires consécutives à la directrice, on sent bien que l'on retomberait dans le cas précédent. Nous observerons seulement qu'il faudrait évaluer ici chacun des segmens, tels que AA'EE', séparément. Fig. 228.

DEUXIÈME SECTION.

DES SURFACES PLANES INDÉFINIES.

CHAPITRE PREMIER.

DES PLANS ET DES LIGNES DROITES.

479. Nous avons vu qu'un plan est déterminé par la condition de passer par trois points qui ne sont pas en ligne droite, ou par deux droites qui se coupent; il l'est encore quand il doit passer par deux droites parallèles: ainsi

THÉORÈME.

Deux droites parallèles déterminent un plan.

En effet on pourra toujours mener un plan par deux parallèles donnés, puisque, d'après la définition du n.° 79, ces deux droites sont dans un même plan. En second lieu, on ne pourra en mener qu'un, sans quoi, en prenant deux points sur l'une et un sur l'autre droite, on aurait deux plans distincts passant par ces trois points qui ne sont pas en ligne droite.

480. Corollaire I. *Par un point A donné dans l'espace on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite don-* Fig. 255.

née BC. En effet, si par le point A et la droite BC on mène un plan MN, on pourra tracer dans ce plan et par ce point une parallèle AD à cette droite : or, si l'on pouvait en mener une seconde AF, le plan déterminé par les deux parallèles AF et BC coïnciderait avec le plan MN (17) : donc on aurait par le point A, et dans ce plan, deux parallèles AF et AD à la même droite BC, ce qui est impossible (81).

481. Corollaire II. *Si une droite* AB *glisse sur une autre* CD *en restant constamment parallèle à elle-même, elle engendrera un plan*, sans quoi on pourrait mener par chacun des points de CB deux parallèles à AB : l'une tracée dans le plan ABC, et l'autre qui serait la droite mobile arrivée en ce point.

THÉORÈME.

Fig. 254. 482. *Si une droite* AO *est perpendiculaire à deux autres droites* BC *et* DF *menées par son pied dans le plan* MN, c'est-à-dire par le point où elle perce ce plan, *elle sera perpendiculaire à toute autre droite* GI *menée par son pied dans ce plan* (*a*).

Par deux points quelconques B et D, pris sur les côtés de l'angle BOD, dans lequel est tracée la droite OG, tirons la ligne BD, qui coupe IG en G ; puis prolongeons AO d'une quantité OA' = OA, et joignons les points A et A' successivement avec chacun des trois points B, G, D. La droite OB étant ainsi perpendiculaire sur le milieu de AA', les distances BA et BA' sont égales (69). Par la même raison AD = DA' : donc les triangles ABD et A'BD sont égaux (207) ; donc l'angle ABD est égal à son homologue A'BD ; par conséquent les triangles ABG et A'BG sont égaux (199) ; donc le côté AG est égal à son homologue A'G ; donc, si par le milieu O de AA' on élève *dans le plan* AGA' une perpendiculaire à cette droite, elle passera par le point G (70) ; donc elle aura deux points communs avec OG ; donc elle coïncidera avec elle ; donc OG est perpendiculaire sur AA'.

(*a*) La légitimité de cette hypothèse devient évidente en observant que l'on peut toujours tracer dans un premier plan conduit suivant AO une perpendiculaire au point O de cette droite, et répéter la même construction dans un second plan mené par AO. Il ne s'agira plus alors que de faire passer un plan par ces deux perpendiculaires.

483. *On appelle* PERPENDICULAIRE *à un plan une droite qui est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener, par son pied, dans ce plan.* Réciproquement, *le plan est dit perpendiculaire à la droite.*

484. Il suit du théorème précédent que, pour s'assurer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires entr'eux, il suffit de vérifier que la droite est perpendiculaire à deux droites menées par son pied dans ce plan.

485. *Un plan perpendiculaire à la verticale d'un lieu est dit horizontal:* ainsi un plan sera horizontal quand il sera conduit suivant deux perpendiculaires à la verticale, ou, en d'autres termes, suivant deux horizontales. On parvient à donner à un plan cette direction au moyen du *niveau* des maçons. Cet instrument est composé de trois règles BD, BF et AC, qui forment Fig. 255.
par leur assemblage un triangle isocèle ABC, du sommet B duquel on fait tomber un fil à plomb BP. Les deux branches BD et BF sont égales, de sorte que la droite DF, qui joindrait leurs extrémités, est parallèle à AC (279). Par conséquent, si l'on pose le niveau sur un plan horizontal, auquel cas la direction du fil à plomb sera perpendiculaire à DF, ce fil devra venir battre exactement sur une *ligne de foi* tracée suivant la direction de la perpendiculaire abaissée du point B sur AC, et passant ainsi par le milieu de la règle AC; et réciproquement, si le fil à plomb prend cette direction, il sera perpendiculaire à DF (82), de sorte que cette droite sera horizontale. Si donc, en plaçant le niveau dans deux positions à peu près rectangulaires, pour plus d'exactitude, on trouve que cette condition est satisfaite, on en conclura que le plan dont il s'agit est horizontal.

486. On fait encore fréquemment usage, dans les arts, d'un autre niveau dit *à bulle d'air*. Il est formé d'un tube de verre Fig. 256.
fermé à ses deux extrémités, et dont l'intérieur, *très-légèrement* arqué (*a*), est rempli en partie d'eau, d'alcohol ou d'éther. L'espace qui n'est pas occupé par le liquide, l'est par de l'air, qui, en vertu de sa légèreté spécifique, se porte à la partie supérieure du tube, de telle manière que le milieu de la bulle répond au point où la tangente à la courbure intérieure du tube est

---

(*a*) Le rayon de courbure va quelquefois jusqu'à plus de 600 mètres.

horizontale. Si donc on trace sur la surface supérieure du niveau des divisions équidistantes de ce point numéroté *zéro*, et qu'on le fixe sur une règle parallèle à la tangente dont il s'agit, chaque fois que l'on posera la règle sur un plan horizontal, les extrémités de la bulle répondront à des divisions de même nom. Mais si le plan n'est point horizontal, il n'en sera plus ainsi, et le milieu de la bulle se portera au point du tube qui est le plus élevé, de sorte que l'on jugera ainsi du sens dans lequel il faudrait faire tourner le plan pour le rendre horizontal. Ce niveau est bien plus exact que celui des maçons, et il l'est d'autant plus qu'il est plus long et plus large, et que la bulle a plus d'étendue.

THÉORÈME.

Fig. 254. 487. *Si trois droites* BO, GO et DO *sont perpendiculaires sur une même droite* AO *et au même point, ces trois droites seront dans un même plan perpendiculaire à cette droite* AO.

Je dis, en effet, que si nous menons un plan par les deux premières droites BO et GO, la troisième DO sera dans ce plan : car si elle n'y est pas, conduisons un plan par les deux droites AO et DO, et soit D'O sa *trace* (*a*) sur le plan BOG ; la droite AO sera perpendiculaire sur D'O (482), et nous aurons ainsi dans le plan AOD deux perpendiculaires DO et D'O sur la droite AO, et au même point O, ce qui ne se peut : donc DO est dans le plan BOG perpendiculaire à AO ; donc, etc.

488. Ainsi *le lieu géométrique de toutes les perpendiculaires élevées sur une droite par un même point, est un plan perpendiculaire à cette droite.*

C'est sur ce principe qu'est fondé l'usage des *scies circulaires* que l'on emploie principalement pour débiter les bois de placage. Imaginez une roue de six mètres environ de diamètre, dont la circonférence est formée de plaques d'acier dentées. Cette roue est mobile autour d'un axe horizontal, de sorte que sa circonférence trace un plan vertical dans le bloc de bois que porte contre ses dents un chariot dont la vîtesse est proportionnée à celle de la scie. On débite ainsi des feuilles d'acajou dont la largeur a quelquefois près d'un mètre et demi.

(*a*) L'intersection d'un plan par un autre plan, ou par une droite, se nomme la trace de ce second plan ou de cette droite sur le premier.

THÉORÈME.

489. *Par un point donné* O *on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à un plan* MN. Fig. 257.

Supposons, en effet, que du point O on puisse mener deux perpendiculaires OA et OB sur le plan MN. Par ces deux droites je conduis un plan, et soit CD sa trace sur MN : les deux droites OA et OB perpendiculaires à ce plan, le seront donc à CD; et ainsi l'on pourra mener dans le plan AOB, par un même point O de ce plan, deux perpendiculaires à une droite CD située dans ce plan, ce qui ne se peut : donc, etc.

490. *On appelle* OBLIQUE *à un plan toute droite qui rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.*

THÉORÈME.

491. *Si une perpendiculaire* OA, *et différentes obliques* AB, AC, AD, *à un plan* MN, *partent d'un même point* A, 1.° *la perpendiculaire* AO *est plus courte que toute oblique ;* 2.° *les obliques* AB *et* AC *qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire, sont égales;* 3.° *de deux obliques* AC *et* AD, *celle* AD *qui s'en écarte le plus est la plus longue.* Fig. 258.

1.° La perpendiculaire OA est plus petite que l'oblique AB, en vertu du théorème du n.° 63.

2.° Les obliques AB et AC sont égales : car elles sont les hypothénuses des deux triangles rectangles égaux AOB et AOC (199).

3.° L'oblique AD est plus grande que AC : car si l'on prend $OC' = OC$, et que l'on joigne AC', cette oblique sera égale à AC; mais, puisque, par hypothèse, $OD > OC$, l'oblique $AD > AC'$, c'est-à-dire que AC.

492. COROLLAIRE I. Réciproquement, si *deux obliques à un plan partent d'un même point, et qu'elles soient égales, elles s'écarteront également du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan; et, si elles sont inégales, c'est la plus longue qui s'en écartera le plus.*

493. COROLLAIRE II. *La distance d'un point à un plan a pour mesure la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

PROBLÈME.

494. *Mener, par un point donné, une perpendiculaire*
Fig. 258. *à un plan donné* MN.

1.° Si le point est donné en O sur le plan MN, on disposera deux équerres de manière que deux de leurs côtés coïncident, leurs sommets étant réunis en O. La direction du côté commun sera celle de la perpendiculaire demandée (484).

Dans le cas particulier où le plan MN serait horizontal, *la* direction de la perpendiculaire demandée serait celle même d'un fil à plomb qui viendrait tomber au point O.

2.° Si le point est donné en A, hors du plan, on marquera sur ce plan trois points B, C, D, équidistans de A, et l'on cherchera le centre de la circonférence déterminée par ces trois points. Joignant ce centre au point A, la droite AO résoudra le problème (492). Si l'on désire de connaître la longueur de cette perpendiculaire, on élèvera au point O, dans le plan MN, *une* perpendiculaire sur BO, et il n'y aura qu'à la couper par un arc décrit de B, comme centre, avec le rayon AB.

Si le plan MN est horizontal, on laissera tomber du point A un fil à plomb sur ce plan, ce qui déterminera le pied de la perpendiculaire demandée.

THÉORÈME.

Fig. 259. 495. *Si du pied d'une perpendiculaire* AO *à un plan* MN, *on abaisse une perpendiculaire* OD *sur une droite* BC *tracée dans ce plan, et qu'on joigne le pied de cette seconde perpendiculaire avec un point quelconque* A *de la première, la droite de jonction* AD *sera perpendiculaire à la droite* BC *du plan.*

Prenons, en effet, sur BC les deux distances égales DB et DC, et joignons OB et OC, AB et AC. On aura évidemment OB$=$OC (66), et par conséquent AB$=$AC (491, 2°) : donc, si l'on élève par le point D, et dans le plan BAC, une perpendiculaire sur BC, elle ira passer par le point A, et coïncidera ainsi avec AD; donc AD est précisément cette perpendiculaire.

496. Corollaire. Pour mener d'un point A donné, hors d'un plan MN, une perpendiculaire sur une droite BC, située dans ce plan, abaissez du point A une perpendiculaire AO sur le plan

MN, puis du point O une perpendiculaire sur BC, et joignez le pied D de celle-ci avec le point A.

497. Scholie. Les deux droites BC et AO ne se rencontrent évidemment pas, et cependant elles ne sont point parallèles : car, pour qu'elles le fussent, il faudrait encore qu'elles se trouvassent dans un même plan (79), lequel coïnciderait avec le plan MN, de sorte que la droite AO serait tout entière dans MN, ce qui n'est pas. Ainsi, *de ce que deux droites ne se rencontrent pas dans l'espace, il faut bien se garder de conclure qu'elles soient parallèles.*

THÉORÈME.

498. *Deux perpendiculaires* AB *et* CD *à un même plan* MN *sont parallèles.* Fig. 260.

En effet les deux droites AB et CD sont perpendiculaires à la droite BD qui joint leurs pieds : il suffit donc de prouver qu'elles sont dans un même plan. Pour y parvenir, j'élève au point D sur BD, et dans le plan MN, la perpendiculaire FG, et je joins AD : cette ligne sera perpendiculaire à FG (495); mais déja CD est perpendiculaire à FG (483) : donc les droites BD, AD et CD sont dans un même plan (487); et, comme AB est aussi dans ce plan (15), le théorème se trouve démontré.

THÉORÈME.

499. Réciproquement, *si deux droites* AB, CD, *sont parallèles, et que l'une d'elles* AB *soit perpendiculaire à un plan* MN, *l'autre* CD *le sera aussi.*

En effet, s'il n'en est pas ainsi, on pourra mener par l'un des points de CD une perpendiculaire au plan MN, laquelle sera parallèle à AB. On aura donc par un même point deux parallèles à une même droite AB, ce qui ne se peut (480).

500. Corollaire I. *Deux droites parallèles à une troisième dans l'espace sont parallèles :* car, si l'on mène un plan perpendiculaire à cette troisième, il le sera aux deux autres (499), qui ainsi seront parallèles (498).

501. Corollaire II. *Si deux droites* AB, CD, *sont parallèles, et que par ces droites on mène deux plans* AE et CE *qui se coupent, leur commune intersection* FE *sera parallèle à ces droites.* Fig. 261.

En effet, si par un point quelconque de FE on mène une parallèle à AB, elle le sera aussi à CD : donc elle devra se trouver à la fois dans les deux plans AE et CE; donc elle coïncidera avec leur intersection FE.

502. SCHOLIE. Remarquons que chacune des deux droites AB et CD est *parallèle* à tout plan conduit par l'autre, c'est-à-dire qu'elle ne peut rencontrer ce plan : car, ces droites étant tout entières dans le plan ABCD, AB, par exemple, ne pourra rencontrer un plan mené suivant CD qu'autant qu'elle rencontrera l'intersection de ce plan avec ABCD, c'est-à-dire CD, ce qui ne se peut. Ainsi *toute droite parallèle à une droite tracée dans un plan est parallèle à ce plan.*

503. *On appelle projection d'un* POINT *sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.* Cette projection est unique (489).

504. *On appelle projection d'une* LIGNE *sur un plan, le lieu des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des différens points de cette ligne sur ce plan, que l'on nomme* LE PLAN DE PROJECTION.

505. Il suit de cette définition, que *la projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite :* car le lieu des perpendiculaires abaissées de ses différens points sur ce plan est un plan (498 et 481). Or deux points suffisent pour déterminer une droite : donc il suffira, pour déterminer la projection d'une droite, de joindre les projections de deux quelconques de ses points, ou, mieux encore, de joindre sa trace sur le plan donné avec la projection de l'un quelconque de ses points.

506. *On appelle* PLAN PROJETANT *d'une droite, le lieu des perpendiculaires abaissées de ses différens points sur le plan de projection.*

THÉORÈME.

Fig. 262. 507. *Deux plans* MN, PQ, *perpendiculaires à une même droite* AB, *sont parallèles,* c'est-à-dire qu'ils ne peuvent se rencontrer.

En effet, s'ils pouvaient se rencontrer, en joignant un point quelconque O de leur intersection avec les traces de la droite AB sur ces plans, les droites OA et OB seraient tout entières

dans les plans respectifs MN et PQ, et par conséquent perpendiculaires à AB, ce qui ne se peut.

Deux plans horizontaux sont donc parallèles (485).

THÉORÈME.

508. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième, sont parallèles.*

Car ces intersections ne peuvent se rencontrer, puisqu'elles sont tout entières dans deux plans parallèles; d'ailleurs elles sont dans un même plan : donc elles sont parallèles (79).

THÉORÈME.

509. *Si deux plans* MN, PQ, *sont parallèles, toute perpendiculaire* AB *sur l'un d'eux* MN, *l'est aussi sur l'autre* PQ. Fig. 262.

D'abord la droite AB rencontrera le plan PQ : car si, par un point quelconque de PQ, et par la droite AB, on mène un plan, ses traces CD et FG sur MN et sur PQ, seront parallèles : donc AB, qui rencontre la première, rencontrera aussi la seconde (81), et partant le plan PQ; de plus AB sera perpendiculaire à FG, puisqu'elle l'est, par hypothèse, à CD : donc, étant perpendiculaire à *toute* droite menée par son pied dans le plan PQ, elle le sera à ce plan.

510. Scholie. Puisque toute droite qui coupe le plan MN, rencontre aussi le plan parallèle PQ, on voit que toutes les parallèles que l'on peut mener au plan PQ par un point quelconque de MN, sont situées dans ce dernier plan. Ainsi *le lieu de toutes les parallèles que l'on peut mener par un point donné à un même plan, est un second plan parallèle à celui-ci.*

511. Corollaire. *Par un point donné on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un autre.*

THÉORÈME.

512. *Les parties* AB, GD, *de deux parallèles comprises entre deux plans parallèles* MN, PQ, *sont égales.*

Car, si l'on mène un plan par ces deux parallèles, ses traces AD et BG, sur nos deux plans, seront parallèles (508) : donc AB = GD (224).

513. Corollaire I. *Deux plans parallèles sont partout*

équidistans : car les perpendiculaires abaissées de deux points quelconques de l'un sur l'autre sont parallèles (498), et par conséquent égales.

514. Corollaire II. *Les parallèles comprises entre une droite et un plan parallèles sont égales.*

515. C'est sur ces principes qu'est fondée la construction de la scie à recéper les pieux. On conçoit en effet que si l'on en dispose la lame parallèlement à un plan fixe, et qu'on l'oblige à rester, dans son mouvement, constamment à la même distance de ce plan, elle décrira un plan qui lui sera parallèle.

THÉORÈME.

Fig. 263. 516. *Si deux angles* B *et* B' *ont leurs côtés parallèles,* 1.° *leurs plans seront parallèles;* 2.° *ils seront égaux si les côtés parallèles sont dirigés dans le même sens ou en sens directement contraires;* 3.° *ils seront supplémentaires si, deux côtés parallèles étant dirigés dans le même sens, les deux autres le sont en sens opposés.*

1.° Si le plan ABC n'est pas parallèle à A'B'C', nous pourrons mener par le point B un plan parallèle à A'B'C', lequel ne pourra passer à la fois par les deux droites AB et BC, sans quoi il coïnciderait avec ABC. Supposons donc qu'il ne soit pas dirigé suivant BA, et soit BM sa trace sur le plan ABA'B'. Cette trace sera parallèle à A'B' (508), et ainsi l'on aura par le point B deux parallèles AB et BM à cette droite, ce qui ne se peut : donc le plan ABC est parallèle à A'B'C'.

2.° Supposons que les angles B et B' aient leurs côtés dirigés dans le même sens. Prenons BA = B'A', BC = B'C'; joignons AC, A'C', BB', AA' et CC'. Ces deux dernières sont égales et parallèles à BB' (228), et par conséquent égales et parallèles entre elles : donc le quadrilatère AC' est un parallélogramme, et ainsi AC = A'C'; par conséquent les triangles ABC et A'B'C' sont équilatéraux entre eux; donc leurs angles homologues B et B' sont égaux.

Les deux autres cas se démontrent comme aux n.os 88 et 89.

517. Corollaire. *Si deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles* (508).

La réciproque n'est pas vraie; seulement on peut conclure que si les projections de deux droites sur un même plan sont

parallèles, leurs plans projetans sont parallèles : car ces plans sont déterminés par ces projections et les perpendiculaires élevées par un point de chacune d'elles sur le plan de projection.

D'où l'on voit que *deux droites sont parallèles quand leurs projections sur deux plans donnés sont parallèles :* car les deux plans projetans de l'une sont parallèles aux deux plans projetans de l'autre ; et il est évident que si deux plans parallèles sont coupés par deux autres plans parallèles, les quatre droites qui résultent de leurs intersections sont parallèles; or, de ces quatre intersections, deux sont les droites proposées.

518. Lorsqu'on veut mesurer avec le graphomètre l'angle formé par deux lignes tracées sur le terrain, on place le centre de l'instrument dans la verticale menée par le sommet de cet angle, et l'on pointe les deux alidades sur deux jalons plantés sur ses côtés : les rayons visuels sont alors parallèles aux deux côtés de l'angle, si l'on a eu soin de disposer le plan du cercle horizontalement, et forment ainsi un angle égal à l'angle donné.

Le plus souvent ce n'est pas l'angle même formé par deux lignes que l'on a besoin d'avoir, mais bien la projection de cet angle sur le plan horizontal. Si alors on a eu soin de rendre le plan du cercle bien horizontal, on obtient immédiatement cet angle au moyen des lunettes plongeantes dont le graphomètre est muni, puisqu'elles se meuvent dans des plans verticaux qui sont les plans mêmes qui projettent les côtés de l'angle sur le plan horizontal, et qu'on lit sur le limbe l'angle formé par les traces de ces plans sur ce limbe.

THÉORÈME.

519. *Trois plans parallèles* MN, PQ, RS, *coupent deux droites quelconques* AC, A'C', *en parties proportionnelles,* c'est-à-dire que l'on aura la proportion Fig. 264.

$$AB : BC :: A'B' : B'C'.$$

Joignons AC', et soit D la trace de cette droite sur le plan PQ. Menons un plan par les deux droites AC et AC', et un second par les droites A'C' et AC'. Les traces BD et CC' du premier de ces plans sur les plans PQ et RS étant parallèles, on aura

$$AB : BC :: AD : DC'.$$

Le parallélisme des traces AA' et DB' du plan AC'A' sur MN et PQ donnera semblablement :

$$A'B' : B'C' :: AD : DC' :$$

donc, à cause du rapport commun,

$$AB : BC :: A'B' : B'C',$$

ce qu'il fallait démontrer.

520. Scholie. La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : car deux points ne suffisent pas pour déterminer un plan; toutefois on ne peut faire passer par les points homologues qu'un seul système de trois plans parallèles. Joignons, en effet, AA', CC' et AC', et coupons cette dernière en deux parties AD et DC', proportionnelles à AB et à BC, et par conséquent à A'B' et à B'C'. Si donc on joint BD et DB', ces droites seront parallèles à CC' et à AA'. Par conséquent, si l'on mène par les points A et C' les droites AA'' et C'C'' respectivement parallèles à CC' et à AA', les deux plans A''AA' et C''C'C seront parallèles au plan BDB'; et l'on voit qu'il n'y a que ce système des trois plans parallèles A''AA', BDB' et C''C'C qui puisse passer par les points A et A', B et B' et C et C' : car le plan moyen, devant couper AC' dans le même rapport que AC et que A'C', passe nécessairement par le point D, et coïncide ainsi avec BDB'.

521. Corollaire. Deux plans parallèles coupent un système de droites issues du même point, en parties proportionnelles.

PROBLÈME.

Fig. 265. 522. *Trouver la plus courte distance de deux droites AB, CD, qui ne sont pas situées dans un même plan.*

Cette plus courte distance des deux droites AB et CD est évidemment une ligne droite (10); de plus elle est perpendiculaire aux deux droites AB et CD : car si elle était oblique sur AB, par exemple, elle serait plus longue que la perpendiculaire abaissée sur AB du point où elle coupe CD, ce qui ne se peut. Il s'agit donc de mener une perpendiculaire commune aux deux droites AB et CD.

Pour cela je mène, par un point quelconque de CD, une parallèle CF à AB; et, d'un point quelconque B de celle-ci, j'abaisse la perpendiculaire BG sur le plan de l'angle FCD; par le point G, je tire GI parallèle à CF, et par conséquent à AB; et, par le point I, IK parallèle à BG. Cette droite IK est perpendiculaire aux deux droites AB et CD : car elle est perpendiculaire

au plan FCD, puisqu'elle est parallèle à BG (499); donc elle est perpendiculaire à CD et à IG, et partant à AB.

Je dis maintenant que le problème n'admet qu'une solution. Supposons, en effet, que l'on puisse mener une seconde perpendiculaire MN aux deux droites AB et CD. Si par le point N on tire la parallèle NE à AB, MN sera perpendiculaire sur NE, et partant au plan FCD : donc elle sera dans le plan ABGI, qui est le lieu de toutes les perpendiculaires abaissées des différens points de AB sur le plan FCD (506) : donc elle devra rencontrer CD au point I, ce qui est absurde (61); donc KI est la seule perpendiculaire que l'on puisse mener à la fois sur AB et sur CD.

523. Scholie. Les deux droites AB et CD, qui ne se rencontrent pas, ont cependant, l'une à l'égard de l'autre, une certaine *inclinaison* que l'on mesure par l'angle que font entre elles deux parallèles menées à chacune de ces droites par un même point de l'espace, ou, plus simplement, par l'angle que forme l'une d'elles avec une parallèle menée à l'autre par l'un de ses points. Ainsi l'angle FCD est la mesure de l'inclinaison des deux droites AB et CD.

524. Quant à l'*inclinaison* d'une droite AB sur un plan MN, on doit évidemment prendre pour sa mesure le plus petit des angles qu'elle forme avec les différentes droites que l'on peut mener dans ce plan par le point B où elle le perce. Or cet angle *minimum* est celui même que la droite dont il s'agit fait avec sa projection sur ce plan. En effet, pour avoir la projection de AB sur MN, j'abaisse de l'un quelconque de ses points une perpendiculaire AO sur ce plan, et je joins BO (505). Cela posé, soit BD une droite quelconque menée par le point B dans le plan MN. Je prends BD = BO et je joins AD. Les deux triangles ABO et ABD ont le côté commun AB, le côté BO = BD, et le troisième côté AO du premier est plus petit que le troisième côté AD du second : donc l'angle ABO est plus petit que ABD (206); donc Fig. 259.

L'inclinaison d'une droite sur un plan a pour mesure l'angle qu'elle fait avec sa projection sur ce plan.



CHAPITRE II.

DES ANGLES DIÈDRES ET POLYÈDRES.

525. *On appelle* ANGLE DIÈDRE *la portion indéfinie de l'espace comprise entre deux plans qui se coupent, et sont terminés à leur ligne d'intersection.* Cette droite se nomme *l'arête* du dièdre, et les deux plans qui le comprennent en sont
Fig. 266. les *faces*. Ainsi la droite BC est l'arête du dièdre ABCD, et les plans AC et BD en sont les faces. On désigne, comme on voit, un dièdre par *quatre* lettres, dont les deux extrêmes indiquent des points quelconques de ses faces, et dont les deux moyennes appartiennent à l'arête. Quelquefois même on dénomme un dièdre seulement par les deux lettres placées sur l'arête; mais il faut pour cela que cette arête ne soit pas commune à d'autres dièdres. Ainsi dans la figure 266 on dira très-bien le dièdre BC pour désigner l'angle formé par les deux plans AC et BD.

526. Si par un point quelconque G de l'arête du dièdre BC on mène dans chacune de ses faces les perpendiculaires GF et GI à cette arête, elles formeront un angle FGI, que l'on nomme *l'angle rectiligne correspondant au dièdre* BC, et cet angle est le même, quelle que soit la position de son sommet G sur l'arête. On voit en effet que, si l'on fait la même construction pour tout autre point L de cette arête, l'angle KLO sera égal à FGI, puisqu'ils auront leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens.

THÉORÈME.

527. *Deux dièdres* BC *et* B'C' *sont égaux lorsque leurs angles rectilignes correspondans* FGI *et* F'G'I' *sont eux-mêmes égaux.*

En effet on pourra superposer les deux angles égaux FGI et F'G'I' de manière qu'ils coïncident parfaitement, et alors les arêtes BC et B'C', qui sont respectivement perpendiculaires aux plans de ces angles (484), coïncideront (489); les deux droites F'G' et B'C' étant ainsi placées sur FG et BC, le plan A'C' se confondra avec le plan AC; il en sera de même du plan B'D' à l'égard

de BD, et par conséquent les deux dièdres BC et B'C' coïncideront : donc ils sont égaux.

THÉORÈME.

528. Réciproquement, *si deux dièdres* BC *et* B'C' *sont égaux, leurs angles rectilignes correspondans* FGI *et* F'G'I' *seront aussi égaux.*

On pourra placer en effet ces deux dièdres de manière qu'ils se recouvrent parfaitement, et que le point G' soit sur G. Mais alors les perpendiculaires F'G' et FG aux arètes B'C' et BC, coïncideront. Il en sera de même des droites G'I' et GI, de sorte que l'angle F'G'I' se confondra avec FGI : donc ces angles sont égaux.

529. *Un plan* AB *est* PERPENDICULAIRE *sur un autre* MN *lorsqu'il forme avec lui deux dièdres adjacens égaux* ABCM *et* ABCN. *On dit alors que ces dièdres sont* DROITS. Fig. 267.

THÉORÈME.

530. *L'angle rectiligne correspondant à un dièdre droit, est aussi droit.*

On voit en effet que, si par le point G on mène dans les plans MN et AB les perpendiculaires IK et FG à l'arète BC, les angles rectilignes FGI et FGK, correspondans aux dièdres égaux ABCM et ABCN, seront égaux, et par conséquent droits.

THÉORÈME.

531. Réciproquement, *si l'angle rectiligne* FGI, *correspondant au dièdre* ABCM, *est droit, ce dièdre sera aussi droit.*

Car l'angle FGK, adjacent à FGI, sera droit : donc les deux dièdres ABCM et ABCN, qui leur correspondent, sont égaux, et sont par conséquent droits.

532. COROLLAIRE. *Tout plan* AB *conduit suivant une perpendiculaire* FG *à un autre plan* MN, *est perpendiculaire à celui-ci.*

Ainsi tout plan vertical, c'est-à-dire tout plan conduit suivant la verticale d'un lieu, est perpendiculaire à un plan horizontal quelconque.

THÉORÈME.

533. *Si deux plans* AB *et* BN *sont perpendiculaires entre*

eux, et que l'on mène dans le premier une perpendiculaire FG *à leur intersection* BC, *cette droite sera perpendiculaire au second.*

Elevons, en effet, dans le plan BN la perpendiculaire GK sur l'intersection BC; l'angle FGK sera le rectiligne correspondant au dièdre ABCN, et sera par conséquent droit : donc la ligne FG, perpendiculaire aux deux droites BC et GK menées par son pied dans le plan BN, sera perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME.

534. Réciproquement, *si deux plans* AB *et* BN *sont perpendiculaires entre eux, et que par un point quelconque* G *de leur intersection on élève une perpendiculaire* GF *sur le second, cette droite sera située dans le premier.*

Appliquez le précepte du n.º 59.

THÉORÈME.

535. *Si deux plans* AB *et* ED *qui se coupent sont perpendiculaires à un troisième* MN, *leur commune intersection* FG *est perpendiculaire à ce troisième.*

Car, si par le point G commun aux trois plans on élève une perpendiculaire au plan MN, elle devra se trouver à la fois dans les deux plans AB et ED : donc elle sera leur intersection même FG.

Ainsi l'intersection de deux plans verticaux est une verticale.

THÉORÈME.

536. *Si une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite sur un plan quelconque sera perpendiculaire à la trace du plan dont il s'agit sur le plan de projection.*

Car, puisque la droite est perpendiculaire au plan donné, son plan projetant est perpendiculaire à celui-ci (532); mais il l'est aussi au plan de projection (506). Ainsi, le plan donné et le plan de projection étant perpendiculaires au plan projetant de la droite, leur commune section, c'est-à-dire la trace du plan donné, sera perpendiculaire à ce plan projetant (535), et partant à la projection de la droite, qui est une ligne tracée dans ce plan.

537. SCHOLIE. La réciproque n'est pas vraie; on peut dire

seulement que *si la projection d'une droite sur un plan est perpendiculaire à la trace d'un plan donné sur celui-ci, le plan projetant de la droite est perpendiculaire au plan donné.* En effet cette trace est perpendiculaire au plan projetant de la droite (533) : donc le plan donné est perpendiculaire à ce plan projetant (532).

Il suit de là que, *lorsque les projections d'une droite sur deux plans de projection sont perpendiculaires aux traces d'un plan sur ces deux-là, la droite est perpendiculaire à ce plan :* car, les deux plans projetans de la droite étant perpendiculaires à ce plan, leur commune section, c'est-à-dire cette droite, l'est aussi.

THÉORÈME.

538. *Deux angles dièdres* ABCD *et* EFGH *sont proportionnels à leurs angles rectilignes correspondans* IKL *et* MNO. Fig. 268.

En effet, décrivons entre les côtés des deux angles rectilignes, et avec le même rayon, les arcs IL et MO, et portons celui-ci sur l'autre autant de fois que la chose sera possible. Si ensuite on fait passer des plans par les points de division P et Q et par l'arête BC, leurs traces sur le plan de l'angle IKL formeront les angles PKL et QKP égaux à MNO, et par conséquent les dièdres RBCL et SBCP seront égaux à EFGH (527). On voit donc que le dièdre ABCD contient EFGH autant de fois que l'angle rectiligne correspondant IKL contient MNO, et que le dièdre restant ABCS correspond à l'angle rectiligne restant IKQ; par conséquent si l'on porte à son tour l'arc IQ sur MO, et que l'on fasse passer des plans par les points de division et par l'arête FG, on trouvera de même que le dièdre EFGH contiendra ABCS autant de fois que MNO contiendra IKQ, et que le dièdre restant correspondra à l'angle rectiligne restant, et ainsi de suite si l'on continue d'effectuer sur les arcs IL et MO les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux angles IKL et MNO, et celle des deux dièdres ABCD et EFGH. Les deux séries de quotient que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes : donc le rapport des deux dièdres ABCD et EFGH est le même que celui des deux angles rectilignes correspondans IKL et MNO (37), ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

539. *Un angle dièdre a pour mesure l'angle rectiligne correspondant.*

Mesurer un angle dièdre A, c'est chercher le rapport de cet angle à un autre angle dièdre pris pour unité. Si donc *on prend le* DIÈDRE DROIT D *pour unité*, la mesure de A sera le rapport de A à D. Mais nous venons de voir que deux dièdres sont proportionnels à leurs angles rectilignes correspondans : si donc B et C représentent ces angles rectilignes, le rapport $\frac{A}{D}$ sera le même que celui $\frac{B}{C}$, et par conséquent ce dernier sera la mesure de A. Or, si l'on convient de prendre l'angle droit C pour unité d'angle rectiligne, le rapport $\frac{B}{C}$ sera la mesure de l'angle B : donc la mesure de l'angle B sera aussi celle de l'angle A ; donc *un angle dièdre a pour mesure son angle rectiligne correspondant* (*a*), en attachant à cette manière de s'énoncer le sens que nous avons expliqué au n.° 133.

(*a*) On pourrait demander si un dièdre peut avoir pour mesure un angle rectiligne autre que celui qui est formé par deux perpendiculaires menées dans chaque face sur l'arète et au même point. Si cela était, il faudrait d'abord que les deux côtés de cet angle fussent également inclinés sur l'arète : car le dièdre et l'angle rectiligne qui lui sert de mesure devant varier dans le même rapport, il faut nécessairement que le second devienne nul en même temps que le premier. Considérons donc le dièdre ABCS, et supposons que l'angle IKQ, formé par les deux droites IK et KQ, également inclinées sur ses faces, varie dans le même rapport que ce dièdre. Amenons le plan SC dans une position quelconque RC, et soit KP la position que prend alors la droite *KQ*. Nous aurons donc :

ABCS : IKQ :: SBCR : QKP :: ABCR : IKP ;

d'où, en appliquant le principe du n.° 221 de l'Arithmétique,

ABCS + SBCR : IKQ + QKP :: ABCR : IKP.

Mais les antécédens de cette proportion sont égaux : donc les conséquens le doivent être. Ainsi, pour que l'angle rectiligne IKQ puisse servir de mesure au dièdre ABCS, *il faut* que

IKP = IKQ + QKP :

donc les trois droites IK, QK et PK doivent être dans un même plan, sans quoi on pourrait les regarder comme étant les arètes d'un trièdre, et l'on aurait en conséquence (547) : IKP $<$ IKQ + QKP. Cela posé, si l'on prend

540. SCHOLIE. Si l'on compare les énoncés des théorèmes 125, 126, 131 et 132, à ceux des propositions 527, 528, 538 et 539, on verra que l'angle rectiligne correspondant à un dièdre est à l'égard de ce dièdre ce qu'est à l'égard d'un angle l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.

Remarquons encore que, les angles dièdres étant dans l'espace ce que sont les angles rectilignes sur le plan où ils sont tracés, on peut en conclure que, *quand deux plans se coupent, les dièdres adjacens valent ensemble deux dièdres droits*, et que *ceux qui sont opposés par l'arète sont égaux*; que, *quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les dièdres alternes-internes, ou alternes-externes, ou correspondans, sont égaux*, etc. Il suffirait, pour le démontrer, de mener un plan perpendiculaire à l'arète de l'un des dièdres que l'on compare.

On devra observer toutefois que *les réciproques de ces dernières propositions ne sont vraies qu'autant que les dièdres dont il s'agit ont leurs arètes parallèles :* car deux plans qui ne sont pas parallèles peuvent très-bien former des angles égaux avec un troisième.

541. *On appelle* ANGLE POLYÈDRE *la portion indéfinie de l'espace comprise entre plusieurs plans qui passent par le même point, et qui se terminent à leurs communes intersections.* Ce point est *le sommet* de l'angle polyèdre, ces intersections en sont les *arètes*, et les angles plans que chacune forme avec la suivante en sont les *faces*. Ainsi S est le sommet de l'angle polyèdre SABCDE; les droites SA, SB, SC, SD, SE, sont ses arètes, et les angles ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, sont ses faces. On désigne, comme on voit, un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie de celles qui sont placées respectivement sur un point de chaque arète. Souvent aussi on le dénomme par la lettre seule de son sommet; mais il faut pour cela que ce sommet ne soit pas commun à d'autres angles po- Fig. 269.

---

les trois distances égales KI, KQ et KP, et que l'on joigne BI, BQ et BP, ces trois dernières lignes seront trois obliques égales menées du point B sur le plan KIQP; car les triangles BKI, BKQ et BKP, ont un angle égal compris entre côtés égaux. Donc la perpendiculaire abaissée du point B sur ce plan tombera en K, et coïncidera ainsi avec BK. Donc, pour que l'angle IKQ puisse servir de mesure au dièdre ABCS, il faut que ses côtés soient perpendiculaires à l'arète de ce dièdre.

lyèdres. Ainsi, dans la figure 269, nous dirons très-bien l'angle S pour désigner l'angle polyèdre SABCDE.

542. Si une ligne droite, tracée d'une manière quelconque, ne peut rencontrer la surface d'un angle polyèdre en plus de deux points, on dit que cet angle polyèdre est *convexe* ou à *angles dièdres saillans;* dans le cas contraire il est dit *concave* ou à *angles dièdres rentrans*. L'angle S de la figure 269 est convexe, et celui T de la figure 270 est concave. Les dièdres saillans de ce dernier sont TA, TB, TD, TE, TF, TG, et il n'a qu'un dièdre rentrant TC. Cet angle rentrant vaut quatre dièdres droits, moins le dièdre BTCD, qui nous présente son ouverture.

543. Quand nous parlerons d'un angle polyèdre, il s'agira toujours d'un angle convexe, à moins que nous n'exprimions *le contraire*.

544. On distingue les angles polyèdres d'après le nombre de leurs faces ou de leurs dièdres, et on leur a donné des noms qui désignent précisément le nombre de ces faces. Ainsi l'on appelle *angle trièdre* ou simplement *trièdre* l'angle polyèdre qui a 3 faces,
angle tétraèdre un angle polyèdre qui a........... 4
angle pentaèdre.............................. 5
angle hexaèdre............................... 6
etc.

Remarquons que *le trièdre est le plus simple des angles polyèdres*, et que l'on peut partager un angle polyèdre quelconque en trièdres, comme on partage un polygone en triangles.

THÉORÈME.

Fig. 271. 545. *Si d'un point* S', *pris dans l'intérieur d'un trièdre* S, *on abaisse sur ses faces* ASB, ASC *et* BSC, *les perpendiculaires* S'C', S'B' *et* S'A', *et que par ces perpendiculaires prises deux à deux, on fasse passer des plans, on formera un second trièdre* S', *et les deux trièdres* S *et* S' *jouiront de ces deux propriétés*, 1.° *que les arètes de chacun seront perpendiculaires aux faces de l'autre;* 2.° *que les faces de chacun seront les supplémens des dièdres de l'autre.*

1.° On voit que l'arète SA, par exemple, est perpendiculaire à la face B'S'C', dont les arètes sont supposées perpendiculaires

aux faces ASB et ASC adjacentes à SA : car le plan B'S'C' est perpendiculaire à la fois aux deux plans ASB et ASC (532), et par conséquent à leur commune section SA (535).

2.° Je dis que le dièdre C'S'B'A', dont l'arète S'B' est perpendiculaire au plan de la face ASC, a cette face pour supplément. En effet, cette arète étant perpendiculaire aux traces AB' et B'C des faces C'S'B' et A'S'B' sur le plan ASC, l'angle AB'C est le rectiligne correspondant au dièdre S'B'; mais la somme des angles du quadrilatère SAB'C vaut quatre droits; et comme les angles A et C sont droits, puisque les arètes SA et SC sont perpendiculaires au faces B'S'C' et B'S'A', on voit que les angles ASC et AB'C sont supplémentaires (*a*).

546. SCHOLIE. Les deux trièdres S et S' sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre, parce que chaque face de l'un est le supplément de celui des dièdres de l'autre dont l'arète est perpendiculaire au plan de cette face.

Remarquons que ces trièdres seraient encore supplémentaires si, le point S' étant, par exemple, sur SA, les perpendiculaires à ASB et ASC étaient dirigées toutes deux extérieurement ou toutes deux intérieurement à ces faces. S'il n'en était pas ainsi, ou bien si le sommet du trièdre S' était extérieur au trièdre S, il y aurait des faces de l'un qui seraient égales aux dièdres correspondans de l'autre, au lieu d'en être les supplémens.

THÉORÈME.

547. *Dans tout trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.*

Soit ASC la plus grande des trois faces : je dis donc que $ASC < ASB + BSC$. Fig. 275.

Traçons, en effet, dans le plan de la face ASC la droite SD, qui fasse avec SC un angle $DSC = BSC$, et tirons la droite AC d'un point quelconque de SA à un autre point quelconque de SC. Cette droite coupera SD en un certain point D. Prenons ensuite $SB = SD$, et joignons BA et BC. Le triangle BSC est égal à

(*a*) Si l'angle dièdre SC était obtus, il pourrait se faire que le point B' se trouvât à droite de SC : alors la projection du point A' sur le plan ASC serait à droite de B' en D, de sorte que l'angle AB'D serait le rectiligne correspondant au dièdre S'B'; mais alors cet angle est le supplément de AB'C, qui est égal à ASC. Fig. 272.

DSC (199) : donc $DC = BC$. Or la droite AC est plus petite que la brisée ABC : donc, en retranchant d'une part DC, et de l'autre son égale BC, il restera $AD < AB$. Mais le côté SA est commun aux deux triangles ASD et ASB, et $SD = SB$: donc l'angle ASD, opposé au côté AD, est plus petit que l'angle ASB opposé au côté correspondant AB. Si donc on ajoute au premier l'angle DSC, et au second l'angle égal BSC, on aura ASD + DSC, c'est-à-dire $ASC < ASB + BSC$, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME.

Fig. 260. 548. *Dans tout angle polyèdre* CONVEXE S *la somme des faces est plus petite que quatre droits.*

Coupons l'angle polyèdre proposé S par un plan qui rencontre toutes ses arètes (*a*), et soit ABCDE le polygone formé par les traces de ce plan sur les faces de S. Prenons dans l'intérieur de ce polygone un point quelconque O, et joignons-le à tous les sommets A, B, C, D, E : nous formerons autour de ce point autant de triangles qu'il y en a autour de S, de sorte que la somme des angles des uns sera égale à celle des angles des autres; par conséquent, si l'on démontre que la somme des angles à la base des premiers triangles est moindre que la somme des angles à la base des seconds, on devra en conclure que, par compensation, la somme des angles autour du sommet S sera moindre que celle des angles autour du sommet O; et, comme celle-ci vaut quatre droits, le théorème se trouvera ainsi démontré.

Or au point A nous avons un trièdre formé par les plans SAE, EAB et BAS : donc, en vertu du théorème précédent, l'angle EAB, c'est-à-dire $EAO + OAB$, est moindre que $SAE + SAB$. On verra de même que $ABO + OBC < SBA + SBC$, et ainsi de suite : donc la somme des angles à la base de tous les triangles dont le sommet est en O est plus petite que la somme des angles à la base des triangles dont le sommet est en S. Ainsi dans tout

---

(*a*) La chose sera toujours possible : car, l'angle S étant *convexe*, le plan d'une face quelconque ne peut rencontrer la surface de cet angle, de sorte que toutes les autres arètes sont situées d'un même côté de ce plan. On voit donc que l'on pourra toujours mener par le sommet S un plan qui laisse toutes les arètes de l'angle polyèdre d'un même côté, et qu'ainsi, en conduisant par un point de l'une de ses arètes un plan parallèle à celui-ci, il coupera toutes les autres.

angle polyèdre convexe la somme des faces est moindre que quatre angles droits.

Cette démonstration exige bien que l'angle S soit convexe : car, si le dièdre SB, par exemple, était rentrant, au lieu d'avoir $ABO + OBC < SBA + SBC$, on aurait $4^D - (ABO + OBC) < SBA + SBC$; ainsi le théorème ne serait plus vrai.

THÉORÈME.

549. *La somme des dièdres d'un angle trièdre quelconque est plus grande que* DEUX *droits, et plus petite que* SIX.

Construisons, en effet, le trièdre S' supplémentaire du trièdre proposé S. La somme des dièdres de celui-ci, augmentée de celle des faces de l'autre, formera *six* droits : donc la somme de ces dièdres est moindre que *six* droits. D'un autre côté la somme des faces de S' est moindre que quatre droits : donc la somme des dièdres de S est plus grande que *deux* droits, puisque ces deux sommes réunies forment six droits.

THÉORÈME.

550. *Dans tout trièdre le plus grand dièdre est opposé à la plus grande face, et, réciproquement, la plus grande face est opposée au plus grand dièdre.* Fig. 274.

1.° Soit $ASC > BSC$: je dis que le dièdre SB est plus grand que SA. En effet d'un point quelconque C de l'arête commune à ces deux faces j'abaisse la perpendiculaire CO sur le plan de la troisième ; puis de son pied O je tire les perpendiculaires OA et OB sur SA et SB, et je joins AC et CB. Ces droites seront perpendiculaires respectivement sur ces lignes (495) : de sorte que les angles CAO et CBO seront les rectilignes correspondans aux dièdres SA et SB, et qu'il suffira ainsi de prouver que le premier est plus petit que le second.

Or les deux triangles rectangles ASC, BSC, ont l'hypothénuse commune SC ; et, puisque l'angle ASC est supposé plus grand que BSC, on conçoit que si l'on rabat le second de ces triangles sur le plan du premier, en le faisant tourner autour de SC, le côté SB viendra tomber dans l'angle ASC, et qu'ainsi la perpendiculaire $CB < CA$: donc, si l'on rabat aussi le triangle COB sur COA en le faisant tourner autour de CO, le point B viendra se placer entre A et O, de sorte que l'angle $B > A$ (188).

2.° La réciproque se démontrerait de la même manière, en commençant par comparer les triangles CAO et CBO.

THÉORÈME.

551. *Dans un trièdre* ISOÈDRE, *c'est-à-dire qui a deux faces égales, les dièdres opposés aux faces égales sont égaux; et, réciproquement, si deux dièdres d'un trièdre sont égaux, les faces qui leur sont opposées sont égales.*

La démonstration est la même que tout à l'heure.

THÉORÈME.

552. *Si deux trièdres* S *et* S' *ont leurs faces égales chacune à chacune*, savoir : ASC=A'S'C', ASB=A'S'B', *et* BSC=B'S'C', *leurs dièdres homologues*, c'est-à-dire ceux qui sont opposés à des faces égales, *sont égaux*.

Faites dans le trièdre S la même construction qu'au n.° 550; puis, ayant pris S'C'=SC, exécutez sur le trièdre S' les mêmes constructions que sur S. Je dis d'abord que les angles CAO et et C'A'O', CBO et C'B'O', sont égaux.

En effet les triangles rectangles SAC et S'A'C', ayant l'hypothénuse égale et un angle égal, sont égaux : donc S'A'=SA, et A'C'=AC. Par une raison semblable S'B'=SB, et B'C'=BC : donc les deux quadrilatères ASBO et A'S'B'O', ont deux côtés consécutifs égaux SA et S'A', SB et S'B', adjacens à des angles égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (263); donc A'O'=AO, et B'O'=BO. On voit par là que les triangles rectangles AOC et A'O'C', BOC et B'O'C', ont l'hypothénuse égale et un côté égal, et qu'en conséquence ils sont égaux : donc l'angle C'A'O'=CAO, et l'angle C'B'O'=CBO. Mais ces angles sont les rectilignes correspondans aux dièdres S'A' et SA, S'B' et SB: donc ces dièdres sont égaux.

Il ne s'agit donc plus que de démontrer l'égalité des dièdres SC et S'C', et l'on y parviendra en répétant pour l'une des arètes SA ou SB la construction que nous venons de faire pour l'arète SC.

Remarquons que, si le point O tombait à gauche de SA, l'angle CAO correspondrait non plus au dièdre CSAB, mais à son supplémentaire; et, la démonstration précédente prouvant que le supplémentaire de CSAB est égal à celui de C'S'A'B', on en conclurait encore l'égalité de ces deux dièdres.

Si l'angle ASC est droit, la perpendiculaire abaissée de O

sur SA ira couper cette arète précisément au point S (61), de sorte que l'angle rectiligne correspondant au dièdre SA sera alors CSO, et que le quadrilatère OASB deviendra le triangle OSB. Comme les deux quadrilatères OASB et O'A'S'B' avaient deux côtés consécutifs égaux adjacens à des angles égaux chacun à chacun, les deux triangles OSB et O'S'B' seront dans le cas *d'égalité* énoncé au n.º 201 : car l'angle OSB, différence des angles ASB et ASO, est égal à O'S'B', différence des angles A'S'B' et A'S'O' : donc S'O'=SO, et O'B'=OB; donc, etc.

Si les deux angles ASC et BSC étaient droits, la droite SC, et partant les deux plans ASC et BSC, seraient perpendiculaires à la face ASB : donc les dièdres SA et SB seraient droits, et par conséquent égaux aux dièdres respectifs S'A' et S'B'. Quant aux deux autres dièdres SC et S'C', ils ont pour rectilignes correspondans les faces ASB et A'S'B', et ainsi ils sont égaux.

THÉORÈME.

553. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et* SEMBLABLEMENT DISPOSÉES (*a*).

Portons, en effet, le trièdre S' sur le trièdre S, en plaçant la face A'S'B' sur son égale ASB de manière que leurs arètes homologues coïncident. Alors le plan de la face A'S'C' tombera sur celui de ASC, puisque les deux dièdres SA et S'A' sont égaux (552), et que, les faces homologues étant semblablement disposées, les arètes SC et S'C' doivent se trouver d'un même côté du plan commun ASB; donc, puisque l'angle A'S'C'=ASC, l'arète S'C' se dirigera suivant SC, et les deux faces B'S'C' et BSC coïncideront nécessairement.

554. SCHOLIE I. Si les faces homologues n'étaient pas semblablement disposées, il arriverait que, quand on aurait superposé les faces A'S'B' et ASB, en plaçant S'A' sur SA et S'B' sur SB, il arriverait, dis-je, que les arètes S'C' et SC se trouveraient de part et d'autre du plan ASB, de sorte que la coïncidence des deux trièdres n'aurait plus lieu. En vain voudrait-on renverser le trièdre S' sens dessus dessous, et placer S'A' sur SB et

---

(*a*) C'est-à-dire que, si l'on place deux faces égales l'une sur l'autre en faisant coïncider leurs arètes homologues, les deux arètes restantes seront situées d'un même côté de la face commune.

S'B' sur SA, afin de ramener les deux arètes S'C' et SC d'un même côté du plan ASB : car alors le dièdre S'A' répondrait au dièdre SB; et, comme ces dièdres sont inégaux aussi bien que les faces A'S'C' et BSC, il serait toujours impossible de faire coïncider les trièdres S et S', bien que toutes leurs parties homologues soient égales. On dit alors que les deux trièdres sont *symétriques*. Ainsi *nous appellerons trièdres symétriques deux trièdres qui auront toutes leurs parties constituantes égales chacune à chacune, mais disposées dans un ordre* INVERSE.

On forme immédiatement le trièdre symétrique d'un trièdre donné en prolongeant les arètes de celui-ci, et prenant pour ses faces les angles plans opposés par le sommet à celles de ce trièdre. On voit en effet que si l'on fait faire une demi-révolu-
Fig. 275. tion à l'angle B'SA' dans son plan et autour de son sommet S, ses côtés S'A' et S'B' viendront s'appliquer respectivement sur SA et SB, mais que les arètes S'C' et SC resteront de part et d'autre du plan commun.

Soit SC'' la position qu'occupe alors l'arète S'C'. Je dis que les deux arètes SC et SC'' sont situées dans un plan perpendiculaire à ASB, et sont également inclinées sur ASB. Prenons, en effet, SC'' = SC, et joignons CC'': il suffira de démontrer que le plan ASB est perpendiculaire sur le milieu de CC'' (532 et 524). Pour cela je joins les points C et C'' avec deux points quelconques A et B des arètes SA et SB, ce qui forme les triangles égaux CSA et C''SA, CSB et C''SB (199) : donc CA = C''A, et CB = C''B; donc, si l'on joint le milieu O de CC'' avec les points S, A, B, les trois droites SO, AO et BO seront perpendiculaires à CC'' (71), et par conséquent détermineront un plan perpendiculaire à CC'' (487) et en son milieu. Mais ce plan n'est autre que ASB : donc, etc.

On voit par là que les deux trièdres SABC et S''ABC sont *symétriquement* placés de part et d'autre du plan ASB, et voilà pourquoi *Legendre* les a appelés *angles trièdres* SYMÉTRIQUES.

On conçoit que deux angles polyèdres quelconques concaves
Fig. 269. ou convexes S et S' peuvent avoir toutes leurs faces consécutives égales chacune à chacune, savoir : ASB = A'S'B', BSC = B'S'C', CSD = C'S'D', etc., mais disposées dans un ordre inverse; et leurs angles dièdres homologues (ceux qui sont compris entre

des faces égales), SA et S'A', SB et S'B', SC et S'C', etc., égaux. Alors, si l'on place la face A'S'B', par exemple, sur son égale ASB, en faisant coïncider leurs arètes homologues, toutes les autres arètes homologues des deux angles S et S' seront situées de part et d'autre du plan commun ASB, de sorte que ces deux angles polyèdres ne pourront pas coïncider, bien que toutes leurs parties constituantes soient égales. Nous dirons donc encore qu'ils sont symétriques.

555. SCHOLIE II. Dans les figures planes il n'y a point, à proprement parler, d'égalité par symétrie : car, comme le dit *Legendre*, toutes celles qu'on voudrait appeler ainsi seraient des égalités absolues ou de superposition. Si l'on abaisse, en effet, de tous les sommets d'un polygone ABCDE, des perpendiculaires sur une droite quelconque XY, tracée dans son plan, qu'on prolonge chacune d'elles d'une quantité égale à elle-même, et que l'on joigne deux à deux leurs extrémités, on formera un polygone A'B'C'D'E', qui aura bien ses angles et ses côtés égaux chacun aux angles et aux côtés du polygone ABCDE, et disposés dans un ordre inverse. Cependant il suffira, pour superposer ces deux polygones, de plier la figure le long de XY. Ainsi ces polygones sont réellement symétriques par rapport à la droite XY, que l'on appelle en conséquence leur *axe de symétrie;* mais ils ne sont pas symétriques dans le sens que nous avons attaché à cette expression en parlant des trièdres SABC et S''ABC. C'est qu'en effet on peut prendre indifféremment le dessus pour le dessous d'une figure plane, et *vice versâ*, et qu'il n'en est pas ainsi pour les figures qui réunissent les trois dimensions de l'étendue.

Fig. 276. Fig. 275.

THÉORÈME.

556. *Deux trièdres* S *et* S' *sont égaux lorsque leurs dièdres sont égaux chacun à chacun, et que leurs faces homologues sont semblablement disposées.*

Si l'on construit, en effet, les deux trièdres supplémentaires T et T' des trièdres S et S', ils auront leurs faces homologues égales chacune à chacune (545), et par conséquent leurs dièdres homologues égaux chacun à chacun (552) : donc les trièdres S et S' auront ainsi leurs faces homologues égales et, par hypothèse, semblablement disposées; donc ils sont égaux.

THÉORÈME.

557. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Répétez ici la démonstration du n.o 553.

THÉORÈME.

558. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun, et que leurs faces homologues sont semblablement disposées.*

La démonstration est analogue à celle du n.o 553.

559. Scholie. Si les élémens dont l'égalité constitue celle des deux trièdres, étaient disposés dans un ordre inverse, ces deux trièdres seraient symétriques. On conçoit, en effet, que si l'on construit le symétrique du premier de ces trièdres, il sera égal au second, en vertu de l'un de nos trois derniers théorèmes.

THÉORÈME.

Fig. 274. 560. *Deux trièdres symétriques* S *et* S' *sont équivalens.*

Prenons, en effet, sur les arètes du trièdre S les trois distances égales SA, SB, SC; menons un plan par les trois points A, B, C; et abaissons sur ce plan la perpendiculaire SO. Elle ira tomber au centre du cercle qui passerait par ces trois points (494, 2.°). Conduisons des plans par cette droite et chacune des trois arètes SA, SB et SC; prenons ensuite S'A' = SA, et exécutons sur le trièdre S' la même construction que sur S. Cela posé, les triangles SAC et S'A'C' sont égaux (199); donc AC = A'C'. Par la même raison AB = A'B', et BC = B'C' : donc les triangles ABC et A'B'C' sont superposables, et par conséquent les rayons AO et A'O' des circonférences ABC et A'B'C' sont égaux (99); ainsi les triangles isocèles AOC et A'O'C' sont équilatéraux entr'eux : on pourra donc les superposer en plaçant les points A' et C' respectivement sur C et sur A : donc la perpendiculaire S'O' au plan A'B'C', prendra la direction SO (489); et, comme elles sont égales, puisque les triangles rectangles SAO et S'A'O' ont l'hypothénuse égale et un côté égal, le point S' tombera sur S; ainsi le trièdre S'O'A'C' coïncidera parfaitement avec SOAC. On démontrerait de même que les trièdres SOAB et S'O'A'B',

SOBC et S'O'B'C' sont égaux. Puis donc que le trièdre S' est composé avec les trièdres S'O'A'C', S'O'A'B' et S'O'B'C', comme S l'est avec les trièdres correspondans SOAC, SOAB et SOBC, on doit conclure que ces deux trièdres sont équivalens.

PROBLÈME.

561. *Etant données les mesures* A, B, C (539) *des trois dièdres d'un angle trièdre* S, *trouver la mesure de ce trièdre en prenant le* TRIÈDRE TRIRECTANGLE (*a*) *pour unité.* Fig. 275.

Le trièdre trirectangle étant la moitié de l'angle dièdre droit, on voit que si on le prend pour unité, les mesures des dièdres SA, SB et SC seront respectivement 2A, 2B et 2C. Cela posé, prolongeons les trois arêtes du trièdre S en SA', SB' et SC'. On voit immédiatement que la somme des deux trièdres SCBA et SCBA' compose le dièdre CAA'B; ainsi

$$S + SCBA' = 2A;$$

de même

$$S + SCAB' = 2B.$$

La somme des deux trièdres SCA'B' et SC'A'B' forme le dièdre A'CC'B'; mais le trièdre SC'A'B' est équivalent à son symétrique S (554 et 560) : donc

$$S + SCA'B' = 2C.$$

Si maintenant on additionne ces trois équations, on verra que la somme de leurs premiers membres se compose de deux fois le trièdre S, et des quatre trièdres S, SCBA', SCAB' et SCA'B', qui, remplissant tout l'espace situé au dessus du plan ABA'B' et autour de leur sommet commun S, valent quatre trièdres trirectangles, c'est-à-dire *quatre unités :* donc on aura

$$2S + 4 = 2A + 2B + 2C;$$

d'où, en divisant tout par 2, et retranchant ensuite deux unités des deux membres :

$$S = A + B + C - 2.$$

Ainsi *un trièdre a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles dièdres sur deux droits*, c'est-à-dire le rapport de l'excès de la somme de ces dièdres sur deux droits à

(*a*) On appelle ainsi le trièdre qui a ses trois angles dièdres droits.

l'angle droit : car on peut regarder le nombre *abstrait* 2 comme exprimant le rapport de deux droits à l'angle droit.

THÉORÈME.

562. *Tout angle polyèdre a pour mesure la somme de ses angles dièdres diminuée d'autant de fois deux droits qu'il a de faces, moins deux.*

1.° Supposons d'abord que l'angle polyèdre proposé soit convexe. Si, par une arête quelconque de l'un de ses dièdres, et par celles de tous les dièdres non adjacens à celui-ci, on mène des plans, on partagera cet angle polyèdre en autant de trièdres qu'il a de faces, moins deux (256, 1.°); donc sa mesure sera égale à la somme de tous les dièdres de ces trièdres, moins autant de fois deux droits qu'il a de faces, moins deux; mais la somme des angles de tous les trièdres est évidemment égale à la somme des dièdres de l'angle polyèdre proposé; donc enfin *un angle polyèdre convexe a pour mesure la somme de ses angles dièdres diminuée d'autant de fois deux droits qu'il a de faces, moins deux.*

2.° Si l'angle polyèdre est concave, on l'enfermera facilement dans un angle polyèdre convexe, en menant des plans par les arètes des faces qui forment les angles rentrans (256, 2.°); et en retranchant ensuite du nouvel angle polyèdre successivement chacun des trièdres dont on aura augmenté le premier, on reviendra à ce premier. Ainsi, dans la figure 270, on aura conduit un plan par les deux arètes TB et TD : donc, pour avoir la mesure de l'angle T, il faudra diminuer celle de l'angle TABDEFG de celle du trièdre TBCD, c'est-à-dire de

$$DTBC + BTDC + BTCD - 2 = DTBC + BTCD - C + 2:$$

car l'angle BTCD est égal à quatre droits moins l'angle rentrant C. Mais $ABTD - DTBC = B$, et $BDTE - BDTC = D$; donc enfin *la mesure de l'angle polyèdre primitif sera égale à la somme de ses angles*, diminuée d'autant de fois deux droits qu'il y a de faces, moins deux, dans l'angle TABDEFG, moins deux droits, c'est-à-dire *diminuée d'autant de fois deux droits qu'il a de faces, moins deux.*

Comme ce raisonnement pourrait évidemment s'appliquer à chacun des angles rentrans de l'angle polyèdre proposé, notre théorème se trouve ainsi démontré dans tous les cas.

PROBLÈME.

563. *Etant donnés trois des six élémens d'un trièdre, déterminer les trois autres par une construction graphique.*

On distingue dans un trièdre six élémens, savoir : ses trois faces et ses trois dièdres, de sorte que l'énoncé du problème présente six questions à réssoudre : car on peut donner sucessivement,

1.° Les trois faces;
2.° Deux faces, et le dièdre compris;
3.° Deux faces, et le dièdre opposé à l'une d'elles;
4.° Une face, et les deux dièdres adjacens;
5.° Une face, et deux dièdres dont l'un est opposé à cette face;
6.° Les trois dièdres.

Or ces six questions peuvent se réduire à trois : car si l'on donnait, par exemple, les trois dièdres A, B, C d'un trièdre(*a*), les faces du trièdre supplémentaire vaudraient respectivement 180°—A, 180°—B, 180°—C. Si donc on savait résoudre la première question, on pourrait déterminer les dièdres de ce trièdre supplémentaire, de sorte qu'en en prenant les supplémens, on aurait les faces du trièdre proposé. Ainsi la sixième et la première question se réduisent à une seule. Il en est de même de la cinquième et de la troisième, ainsi que de la quatrième et de la seconde. Nous n'aurons donc à nous occuper que des trois premiers problèmes.

564. PREMIÈRE QUESTION. *Etant données les trois faces a, b, c, d'un trièdre, construire les angles rectilignes correspondans à ses dièdres.*

Si l'on fait sur un plan quelconque un angle ASB $=c$, et Fig. 277.
ensuite les deux angles AS C' $=b$ et BSC'' $=a$, on pourra regarder ces angles comme les rabattemens des faces b et a sur le plan de la troisième c. Si donc on prend les deux distances égales SC' et SC'', et qu'on abaisse des points C' et C'' les perpendiculaires C'AO et C''BO sur SA et SB, lorsqu'on ramènera les angles b et a à leur position primitive, les points C' et C'' viendront se réunir en un seul, que j'appellerai C; et, comme les

(*a*) Nous conviendrons de représenter par A, B, C, les dièdres d'un trièdre quelconque, et par a, b, c, les faces opposées de ce trièdre, de sorte que a, par exemple, représente la face opposée au dièdre A.

droites C'A et C''B n'auront pas cessé d'être perpendiculaires à SA et SB, elles formeront alors avec AO et BO des angles CAO et CBO, qui seront les rectilignes correspondans aux dièdres SA et SB.

Pour construire le premier, j'observe que dans le mouvement de rotation de la face *b* autour de SA, le point C décrit une circonférence dont A est le centre, et C'A le rayon [le plan de cette circonférence est perpendiculaire à SA (488)]. Si donc on fait tourner son plan autour de sa trace C'AO, le point C viendra se rabattre sur le plan ASB, en un certain point de la circonférence $C'C_1$. Mais dans ce mouvement la droite CO, intersection des deux plans CAO et COB, ne cesse pas d'être perpendiculaire (535) sur AO : donc elle se rabattra sur la perpendiculaire C_1O à AO, de sorte que le point C se trouvera alors en C_1. L'angle C_1AO est donc le rabattement de CAO, et est ainsi l'angle rectiligne correspondant au dièdre SA.

On verra de la même manière que l'angle C_2BO correspondant au dièdre SB, s'obtient en joignant le point B avec le point C_2, intersection de la perpendiculaire élevée au point O sur OB avec la circonférence décrite du point B comme centre avec le rayon BC''.

On aura une vérification de l'exactitude des constructions si les deux droites OC_1 et OC_2 sont égales.

Enfin, pour avoir le troisième angle dièdre SC, il n'y aura qu'à prendre pour plan de développement celui de la face *b* ou celui de la face *a*. Mais il sera *en général* plus simple de concevoir par le point C un plan perpendiculaire à la troisième arête SC. Ses traces sur les plans des deux faces *a* et *b*, formeront un angle qui sera le rectiligne correspondant au dièdre SC, et leurs rabattemens sur le plan de développement seront les perpendiculaires C'D, C''E aux droites SC' et SC''; et, comme, dans le mouvement de rotation des faces *a* et *b*, les points D et E sont restés immobiles, puisqu'ils se trouvent sur les deux charnières, on voit que la droite DE est la trace du plan dont il s'agit sur ASB. Si donc on le rabat sur ce dernier, en le faisant tourner autour de DE, les distances du point C aux points D et E resteront égales à C'D et à C''E; de sorte que le rabattement du point C sera le point γ de section des arcs décrits avec ces rayons : donc l'angle $D\gamma E$ est le troisième angle demandé.

Remarquons toutefois que si l'angle *b*, par exemple, était droit

ou obtus, la trace du plan perpendiculaire à l'arète SC, sur le plan de cette face, serait parallèle à SA, ou ne la rencontrerait que dans son prolongement. Dans le premier cas la construction ne serait plus possible, et dans le second l'angle DCE pourrait être le supplément de l'angle demandé.

Si la construction est possible, les trois points S, O et γ doivent se trouver sur une même droite perpendiculaire à DE. En effet, puisque le plan CDE est perpendiculaire à la droite SC, sa trace DE sur ASB doit être perpendiculaire à la projection SO de cette droite sur ce plan (536). Donc la droite qui joint le point C avec I, est perpendiculaire sur DE (495); donc son rabattement Iγ l'est aussi; donc ce rabattement est le prolongement de SDI.

Le problème que nous venons de résoudre sera toujours possible si la plus grande des trois faces données est plus petite que la somme des deux autres. Supposons, en effet, que la face ASB, sur le plan de laquelle on a développé les deux autres, soit la plus grande. Les prolongemens des perpendiculaires C'A et C''B iront ainsi couper la circonférence du rayon SC' entre A' et B'; et, comme l'arc A'B' est, d'après l'hypothèse, $<$A'C' + B'C'', le point N sera nécessairement situé entre A' et M; de sorte que le point O de concours des perpendiculaires C'A et C''B sera intérieur à la circonférence SC' : donc C'A $>$ AO; le triangle C_1AO sera donc possible. Si on le relève perpendiculairement au plan ASB, et que l'on joigne la nouvelle position C de son sommet avec S, on formera un triangle rectangle SAC égal à SAC' (199) : donc SC = SC', et l'angle ASC sera égal à ASC'. Mais le triangle rectangle CSB sera aussi égal à C''SB (216): donc l'angle CSB sera égal à C''SB; donc le trièdre SABC aura bien ses trois faces égales aux trois angles donnés.

565. SECONDE QUESTION. *Etant données deux faces b et c, et le dièdre A qu'elles comprennent, déterminer la troisième face et les deux autres dièdres.*

Cette question se réduit à trouver la troisième face : car alors on pourra construire les deux dièdres inconnus par le problème précédent.

Faisons sur un plan quelconque deux angles ASB = c et C'SA = b : on pourra regarder celui-ci comme le rabattement de la face b sur le plan de c. Si donc on abaisse d'un point quelconque C' de SC' la perpendiculaire C'AO sur SA, lorsqu'on Fig. 278.

ramènera la face b à sa position primitive, la droite C'A formera avec AO un angle qui sera le rectiligne correspondant au dièdre SA. Mais dans le mouvement de rotation de la face b autour de SA le point qui est rabattu en C', et que nous appellerons C, décrit une circonférence dont A est le centre et C'A le rayon : si donc on fait tourner son plan autour de sa trace C'AO, le point C viendra se rabattre sur le plan ASB, en un certain point de la circonférence $C'C_1$; mais dans son mouvement l'inclinaison de CA sur AO ne changera pas : donc cette droite se rabattra sur la ligne AC_1, qui fait avec AO un angle égal au rectiligne correspondant au dièdre SA, de sorte que le point C se trouvera alors en C_1. Par conséquent, si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire C_1O sur AO, le point O sera la projection de C sur le plan ASB. Donc, si l'on joint C avec le pied de la perpendiculaire OB à SB, la droite CB sera aussi perpendiculaire à SB; de sorte que, quand la troisième face sera rabattue sur le plan ASB, le point C se trouvera sur le prolongement de OB; mais sa distance au point S n'aura pas varié; et ainsi ce point sera aussi sur la circonférence SC' : donc il sera déterminé par leur intersection C''; de sorte que BSC'' sera le rabattement de la troisième face.

566. Troisième question. *Étant données deux faces a et c et le dièdre A opposé à la première, déterminer la troisième face et les deux autres dièdres.*

Ce problème se réduit encore comme le précédent à la détermination de la troisième face b.

Fig. 279. Faisons, sur un plan, l'angle ASB $= c$, et BSC'' $= a$: on pourra regarder ce dernier comme le rabattement de la face a sur le plan de c. Mais, dans le mouvement de rotation de cette face, un point quelconque C de l'arète opposée à c, aura décrit une circonférence dont le plan sera perpendiculaire à SB, et dont le centre sera sur cette droite : de sorte que si C'' est le rabattement de ce point, le rayon de cette circonférence sera la perpendiculaire C''B à SB : donc, si l'on rabat cette circonférence sur le plan ASB en faisant tourner son plan autour de sa trace C''BA, le point C viendra se rabattre sur la circonférence C''B. Mais il appartient aussi à la trace du plan CBA sur celui de la troisième face : donc, si l'on peut construire sur ASB le rabattement de cette trace, le rabattement de C sera déterminé.

Pour y parvenir, je conçois par le point B un plan BA' per-

pendiculaire à l'arète SA : les traces des deux plans BA et BA' sur celui de la troisième face iront concourir en un point K de leur intersection, laquelle est une perpendiculaire élevée au point B sur le plan ASB (532 et 535) ; donc, dans le mouvement de rotation du plan AB, ce point K vient se rabattre sur SB, de sorte que, si la longueur de KB était connue, on aurait le rabattement sur ASB de la trace du plan AB. Mais l'angle KA'B est le rectiligne correspondant au dièdre donné SA : donc, si l'on fait tourner le triangle KA'B autour de sa base A'B, le côté KA' viendra se rabattre sur la droite K'A', qui fait avec A'B un angle égal à A, et KB' tombera sur la perpendiculaire BK'. Ramenant celle-ci sur SB en BK'', et joignant AK'', on aura le rabattement de la trace du plan AB sur celui de la troisième face : donc le point C se trouvera ainsi rabattu en M ou en M_1.

Actuellement, si l'on fait tourner le plan de la troisième face autour de SA, comme charnière, pour l'abattre sur le plan ASB, les distances du point C, supposé rabattu en M, aux points A et S de la charnière, ne varieront pas : de sorte que ce point viendra se placer au point C' d'intersection des arcs AM et SC'' ; donc C'SA est la troisième face correspondante au point M.

On trouverait de la même manière l'angle C_1SA pour la troisième face correspondante au point M_1.

On voit ainsi que le problème admettra en général deux solutions. Cependant, si les deux points de section de la droite AK'' avec la circonférence BC'' étaient situés de part et d'autre du point A, il n'y aurait qu'une solution : car, en construisant le trièdre déterminé par le point de section situé à gauche de A, le dièdre dont l'arète est SA, serait supplément de A. Si la droite AK'' était tangente à la circonférence, il n'y aurait plus qu'une solution, et il n'y en aurait aucune si cette droite et cette circonférence ne se rencontraient pas.

Remarquons que si l'on ramenait le plan ABC'' à sa position primitive, les points M et M_1 se projetteraient en P et P_1 ; de sorte que la troisième face, en venant se rabattre sur le plan ASB, les emportera sur les prolongemens des perpendiculaires abaissées de P et de P_1 sur SA : donc ces perpendiculaires doivent aller passer par les points respectifs C' et C_1, ce qui fournit une vérification de l'exactitude des constructions.

567. Corollaire. Dans l'arpentage on a souvent à construire

la projection horizontale, c'est-à-dire la projection sur un plan horizontal de l'angle formé par deux droites inclinées sur ce plan. Or, si l'on imagine par leur point de concours une verticale, et que l'on mesure les angles qu'elle forme avec chacune des deux droites dont il s'agit, on aura les trois faces d'un trièdre dont le dièdre qui a pour arète la verticale, a pour angle rectiligne correspondant la projection horizontale de la face opposée, c'est-à-dire de l'angle proposé. Il sera donc facile d'obtenir cette projection (564).

On détermine encore la projection horizontale d'un angle donné, ou, comme disent les arpenteurs, *l'angle réduit à l'horizon* de la manière suivante, qui est fort simple :

Fig. 280. Supposez que SC représente la verticale, et tracez les trois angles B'SC, CSA, ASB", respectivement égaux aux trois angles donnés, le dernier étant celui que l'on veut réduire à l'horizon. Menez la perpendiculaire indéfinie XY à SC : vous pourrez la regarder comme la trace d'un plan horizontal sur celui de la face verticale CSA. Or, dans le mouvement de rotation des deux faces autour des charnières SC et SA, les distances des points S, C et A de ces charnières à la trace B de la troisième arète sur ce plan n'ont pas varié : donc SB' et B'C sont ces deux premières distances; et si, ayant pris SB" = SB', on joint AB", cette droite sera la troisième, car le triangle ASB" est évidemment égal au triangle ASB (199). Si donc on décrit des centres C et A les arcs B'β et B"β, le triangle ACβ sera égal au triangle formé par les traces des faces du trièdre S sur le plan horizontal (207); de sorte que l'angle ACβ sera égal à la projection horizontale de l'angle observé ASB, et, par conséquent, sera cet angle *réduit à l'horizon*.



TROISIÈME SECTION.

DES SURFACES COURBES.

CHAPITRE PREMIER.

DES DIFFÉRENTES ESPÈCES DE SURFACES COURBES, ET DE LEURS PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

568. Si l'on fait mouvoir une *ligne* dans l'espace, il pourra arriver, ou qu'elle conserve sa forme en changeant de position, ou qu'elle varie en même temps de forme et de position. Dans les deux cas, on conçoit que cette ligne engendrera ainsi une surface : car il est clair que *le lieu* de toutes ses positions successives partagera l'espace en deux parties auxquelles il servira de *limite*. La nature de la surface ainsi engendrée dépend donc des lois qui règlent à chaque instant la forme de la ligne mobile que l'on nomme la *génératrice* de la surface, et sa position dans l'espace.

On voit donc que *toute surface peut être regardée comme engendrée par le mouvement d'une ligne de forme constante ou variable dans l'espace*, et que cette surface sera complètement déterminée lorsqu'on sera en état de construire, pour un point quelconque, la génératrice suivant la forme et la position qu'elle doit avoir en passant par ce point. On détermine ordinairement les positions successives de la génératrice en l'assujettissant à se mouvoir sur une ou plusieurs lignes fixes que l'on appelle *directrices*.

Ainsi nous avons vu que l'on engendrerait un plan en faisant glisser une ligne droite parallèlement à elle-même le long d'une autre droite (481). La première est la génératrice, et la deuxième est la directrice. Ici la forme de la génératrice est constante.

Si l'on fait tourner une ligne *quelconque* CMD autour d'une droite fixe AB, on engendrera une surface que l'on appelle de révolution, et la forme de sa génératrice sera encore constante. Mais si l'on observe que dans le mouvement de cette courbe les perpendiculaires abaissées de ses différents points sur *l'axe de* Fig. 281.

révolution AB décrivent des circonférences qui ont pour centres les points où elles coupent cet axe, on comprendra que l'on pourra encore regarder la surface comme engendrée par une circonférence qui se mouvrait de telle sorte que, son centre étant toujours sur la droite AB, et son plan étant toujours perpendiculaire à cette droite, son rayon soit, à chaque instant, égal à la distance des points où son plan coupe les deux lignes AB et CMD données dans l'espace. Alors la courbe génératrice change en même temps de forme et de position.

569. Les surfaces que l'on emploie le plus fréquemment dans les arts sont celles qui ont pour génératrices la ligne droite et la circonférence.

Parmi ces dernières on distingue spécialement celle qui est produite en faisant tourner une ligne autour d'un axe fixe, et que nous avons nommée *surface de révolution*. Les plans qui passent par l'axe coupent la surface suivant des courbes symétriques par rapport à cet axe (555), et qui sont évidemment toutes égales entre elles. On les appelle des *méridiens*. Les plans perpendiculaires à l'axe coupent tous la surface suivant des circonférences dont les centres sont sur cet axe, et qui sont généralement inégales. On les nomme des *parallèles*.

570. Une des surfaces de révolution les plus remarquables est celle des *tonneaux*. Si l'on plie une planche mince rectan-
Fig. 282. gulaire entre trois points fixes A, B, C, tels que celui du milieu soit équidistant des deux autres, les bords rectilignes de cette planche deviendront des lignes courbes; et, si l'on fait tourner l'une d'elles autour d'un axe fixe DEF parallèle à la droite AC, elle engendrera la surface du tonneau. Pour exécuter ce vase, on conçoit la circonférence décrite par BE divisée en un assez grand nombre de parties égales, et l'on imagine des plans par chaque point de division et par l'axe DF. De cette manière la surface de révolution se trouve divisée en un certain nombre de parties égales, et l'on forme chacune d'elles au moyen d'une petite planche mince appelée *douve*. Or il est clair que les douves diminuent de largeur depuis leurs milieux jusqu'à leurs extrémités, de sorte que les planches doivent être ainsi terminées par des lignes courbes. Le tonnelier, pour tracer ces courbes, n'a d'autre guide que ses yeux : aussi ne parvient-il qu'après de longs tâtonnemens à obtenir des douves qui joignent bien et qui forment réellement

une surface de révolution. Or la géométrie fournit le moyen de tracer les douves aussi exactement qu'il est nécessaire.

Supposons, en effet, le tonneau construit, et soit ABCA'B'C' la figure d'une de ses douves. Concevons que l'on ait partagé la méridienne ABC en parties très-petites AG, GI, IB.... et que par les points de division on ait mené des plans perpendiculaires à l'axe DF. Ces plans couperont la surface de la douve suivant des droites GG', II', BB'.... et l'axe aux points K, L.... Imaginons encore une méridienne par le milieu de BB': elle coupera les droites AA', GG', II'.... perpendiculairement, et chacune en son milieu. Cela posé, tracez sur une planche très-mince ou sur une feuille de carton une droite $a''c''$ égale en longueur à la courbe génératrice, reportez sur cette droite les divisions de cette courbe, et par ses points de division élevez des perpendiculaires à $a''c''$ respectivement égales à AA', GG', II', BB'... Il est clair qu'en repliant la droite $a''c''$ sur A''C'', les points de division et les perpendiculaires de la première tomberont sur les points de division et sur les perpendiculaires homologues de la deuxième : donc les lignes $agib$.... et $a'g'i'b'$.... recouvriront exactement les méridiennes ABC et A'B'C'. Or tous les triangles DAA'', KGG'', LII''.... sont semblables à EBB''; donc on a les proportions

$$BE : BB'' :: AD : AA'',$$
$$BE : BB'' :: KG : GG'',$$
$$BE : BB'' :: IL : II'',$$
etc.

Ainsi l'on obtiendra les longueurs de AA'', GG'', II''..... en cherchant des quatrièmes proportionnelles à BE, BB'' et AD; à BE, BB'' et KG; à BE, BB'' et IL, etc. Pour les obtenir facilement, on prendra sur les côtés d'un angle quelconque deux longueurs OB et OA respectivement égales aux rayons EB et DA du plus grand et du plus petit parallèle; on joindra BA, et l'on mènera du point O les droites OG, OI..... égales aux rayons des autres parallèles. Alors, si, ayant pris OB''=BB'', on tire B''A'', parallèle à BA, les parties OA'', OG'', OI''.... seront les quatrièmes proportionnelles demandées. On prendra donc $a''a=a''a'=$OA'', $g''g=g''g'=$OG'', $i''i=i''i'=$OI''...... En faisant passer un trait continu par les points a, g, i.... c, un autre par les points a', g', i'.... c', la figure ac' sera un patron d'autant plus exact de la douve que la méridienne aura été partagée en un plus grand nombre de parties.

571. Il y a deux espèces de surfaces engendrées par une ligne droite : *les surfaces gauches* et *les surfaces développables*. On comprend les unes et les autres sous la dénomination commune de *surfaces réglées*, parce que l'on peut appliquer l'arète d'une règle sur ces surfaces.

572. Le caractère distinctif des surfaces gauches *consiste en* ce que deux génératrices consécutives ne sont jamais dans un même plan, de sorte que *l'élément* de la surface compris entre ces deux droites n'est pas plan. C'est un élément courbe qui est illimité dans le sens des droites qui le comprennent.

On satisfait très-simplement à cette condition, c'est-à-dire qu'on engendre une surface gauche en faisant glisser une *ligne* droite sur trois droites qui ne sont pas parallèles à un même plan, ou bien en faisant mouvoir une ligne droite *parallèlement* à un plan fixe, de manière qu'elle s'appuie constamment sur *deux* droites situées dans des plans différens.

Il est d'abord facile de voir que l'une ou l'autre de ces conditions suffit pour régler le mouvement de la génératrice : car, si,
Fig. 285. dans le premier cas, on prend un point quelconque M sur la directrice A, et que par ce point et chacune des deux autres directrices B et C on fasse passer des plans, leur intersection MN rencontrera les deux droites B et C : car, si elle était parallèle à toutes deux, tout plan parallèle au plan AMN serait parallèle à nos trois directrices, ce qui est contraire à l'hypothèse. Réciproquement, toute droite qui, menée par le point M, rencontrera les droites B et C, sera dans nos deux plans, et, par conséquent, coïncidera avec MN.

Pour construire, dans le deuxième cas, la génératrice qui rencontrerait la directrice A en un point quelconque M, menez par ce point un plan parallèle au plan directeur, et joignez le point M avec celui où ce plan auxiliaire rencontrera la deuxième directrice. Ainsi, dans une échelle dont les deux montans ne *seraient* pas dans un même plan, les échelons, supposés également espacés, seraient les génératrices d'une surface gauche dont ces montans seraient les directrices (520).

Remarquons que dans ces deux modes de génération deux génératrices ne peuvent pas se trouver dans un même plan, sans quoi les directrices seraient aussi situées dans ce plan, ce qui ne se peut.

573. Les surfaces gauches qui ont pour directrices des lignes droites, jouissent d'une propriété très-remarquable dont on

trouvera la démonstration synthétique dans *la géometrie descriptive* de M. *de Fourcy*, celle de pouvoir être engendrées par une droite de deux manières différentes. Ainsi, que parmi toutes les droites qui s'appuient sur les trois directrices A, B, C, on en choisisse trois à volonté A', B', C', et que l'on fasse mouvoir une ligne droite sur ces trois dernières : elle engendrera encore la même surface. D'où il suit, comme l'observe *Monge*, que cette surface pourrait s'exécuter comme un tissu. Les fils de la chaîne seraient toutes les génératrices de l'un des modes de génération, et ceux de la trame seraient les génératrices de l'autre.

574. Si une droite se meut de manière que, dans deux positions consécutives, elle se trouve dans un même plan, elle engendrera une SURFACE DÉVELOPPABLE, *c'est-à-dire une surface dont tous les élémens pourront être réunis dans un seul et même plan* SANS DÉCHIRURE NI DUPLICATURE. En effet, si l'on fait tourner chaque élément avec la portion de surface qui lui est adjacente autour de la droite qui le sépare de l'élément précédent, on pourra amener le deuxième élément sur le plan du premier, le troisième sur ce même plan, et ainsi de suite, de sorte que la surface tout entière viendra s'étendre sur le plan sans rupture ni duplicature.

575. Si l'on considère une *courbe à double courbure*, c'est-à-dire telle que trois élémens consécutifs de cette courbe ne soient pas dans un même plan, comme une brisée d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et qu'on prolonge indéfiniment chacun de ses élémens, on formera évidemment une surface développable: car deux de ces droites consécutives sont dans un même plan. Ainsi l'on engendrera une surface développable en faisant glisser une ligne droite sur une courbe à double courbure de manière qu'elle lui soit constamment tangente. La surface est ainsi composée de deux *nappes* indéfinies séparées par la courbe directrice que Monge a nommée *l'arète de rebroussement* de la surface.

576. L'emploi des surfaces développables est extrêmement fréquent dans les arts. Par exemple, lorsque le constructeur de vaisseaux a construit la carcasse d'un navire, il faut encore fermer les espaces compris entre les diverses pièces ABCDE et Fig. 284.
A'B'C'D'E' de la charpente avec des planches disposées côte à côte.

Pour leur donner une forme convenable, on a recours à la méthode du n.° 570. En conséquence on partagera les deux courbes en un même nombre de parties; puis, ayant uni les

points de division B et B', C et C'........ avec de fortes règles, on en courbera une autre sur toutes celles-ci comme on le voit en A''B''C''....... de manière qu'elle soit perpendiculaire à EE', par exemple; on concevra ensuite des perpendiculaires à A''B''C''... et l'on mesurera les parties de ces perpendiculaires comprises entre cette ligne et les directrices AE et A'E', et il sera alors facile de tracer le développement des directrices AE et A'E'.

On obtiendra semblablement celui de l'arête AA' en prenant EE' pour *axe de développement*, et l'on aura ainsi un patron de la surface demandée. Il n'y aura donc plus qu'à le partager en parties proportionnées aux dimensions des planches que l'on doit employer, par des perpendiculaires aux axes de développement, et tailler ensuite les planches sur les patrons partiels ainsi déterminés.

577. Parmi les surfaces développables celles qu'on appelle *coniques et cylindriques* sont les plus fréquemment employées dans les arts. Nous nous en occuperons spécialement; mais nous allons auparavant examiner quelques propriétés générales des surfaces.

578. De même que l'on peut regarder une ligne courbe comme une brisée d'un nombre *infini* de côtés, de même aussi on peut considérer une surface courbe comme composée d'une *infinité* de facettes planes infiniment petites, que l'on nomme les *élémens* de la surface. On conçoit en effet que si l'on fait passer un plan par trois points de la surface infiniment rapprochés, la portion de cette surface détachée par ce plan coïncidera très-sensiblement avec lui. En conséquence nous appellerons plan tangent à une surface courbe en un point donné, le plan de l'élément sur lequel ce point est situé. Or, si l'on conçoit une ligne quelconque tracée par ce point sur la surface, il est clair que l'*élément* de cette ligne auquel ce point appartient, et par conséquent la tangente en ce point, sera situé sur l'élément correspondant de la surface : donc

Toutes les tangentes aux différentes courbes que l'on peut tracer sur une surface par l'un de ses points, sont dans un même plan, qui est le plan tangent à la surface en ce point.

579. La démonstration de ce théorème est, comme on voit,

fondée sur la considération des infiniment petits, mais on peut l'établir directement de la manière suivante.

Soit M un point quelconque d'une surface, AB la forme et la position de la génératrice quand elle passe par ce point, CD une directrice de AB, et GF une autre courbe *quelconque* tracée par le point M sur la surface. Il est clair que si l'on prouve que la tangente à cette dernière courbe au point M est dans le plan déterminé par les tangentes menées aux deux autres courbes AB et CD en ce même point, notre théorème sera démontré. Fig. 285.

Pour y parvenir, considérons la génératrice dans une autre position A'B', et soient M' et N' les points où elle coupe CD et FG. Par les trois points M, M' et N' pris deux à deux menons les sécantes MM', MN' et M'N', qui seront évidemment dans un même plan. Si l'on suppose maintenant que la génératrice A'B' glisse sur CD en se rapprochant de AB, elle entraînera dans son mouvement nos trois sécantes, et leur plan tournera en même temps autour de M. Enfin, quand la génératrice sera revenue à la position AB, les points M' et N' coïncideront avec le point M, et les trois sécantes mobiles seront devenues tangentes aux trois courbes respectives CD, GF et AB. Mais ces trois sécantes étaient, pour chaque position de la génératrice, toujours dans un même plan: nous devons donc conclure que, quand elles sont devenues tangentes, elles doivent se trouver encore dans un même plan, lequel est la limite des positions successives de celui des trois sécantes.

M. de Fourcy observe que cette démonstration serait attaquable si la génératrice changeait de forme dans son mouvement: car la définition de la tangente à une courbe (107) exige que la courbe conserve sa forme pendant que la sécante dont cette tangente est la limite, tourne autour d'un point de cette courbe. Mais, comme on n'a jamais à considérer, dans la pratique des arts, que des surfaces dont la génératrice est de forme constante, cette restriction devient tout-à-fait indifférente pour les applications qu'on y fait de la géométrie.

580. Comme deux droites qui se coupent suffisent pour déterminer un plan, on voit que, pour mener un plan tangent à une surface en un point donné, il suffira de construire les tangentes à deux lignes tracées sur la surface par ce point, et de faire passer un plan par ces deux droites; d'où il suit que le plan tangent

à une surface réglée en un point donné, doit contenir la génératrice qui passe par ce point: car cette droite est elle-même sa propre tangente.

Par conséquent, pour construire le plan tangent à une surface gauche en un point donné, il suffira de mener un plan par les deux génératrices qui passent par ce point (573); et, comme deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan (572), on voit que les plans tangens menés à une surface gauche en deux points différens d'une même génératrice, sont différens; de sorte que le plan tangent à une pareille surface, *coupe* cette surface partout ailleurs qu'au point de contact.

581. Au contraire le plan tangent à une surface *développable en un point donné est tangent à cette surface dans tous les points de la génératrice* qui passe par ce point. En effet, si l'on trace par le point de contact une courbe quelconque sur la surface, il est clair que la tangente à cette courbe en ce point, aura un élément dans le plan de la génératrice dont il s'agit et de la suivante: donc elle y sera tout entière; donc ce plan sera bien un plan tangent à tous les points de cette génératrice.

582. Enfin le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien sur lequel le point de contact est situé. En effet la tangente menée par ce point au parallèle sur lequel il se trouve, est perpendiculaire à l'intersection de ce parallèle et du méridien (108); et, comme ces deux plans sont perpendiculaires entre eux, elle est perpendiculaire au méridien (533): donc le plan tangent lui est aussi perpendiculaire (532).

583. On appelle *normale* la perpendiculaire au plan tangent menée par le point de contact.



CHAPITRE II.

DES SURFACES CONIQUES.

584. On appelle surface conique une surface engendrée par
Fig. 286. une droite indéfinie AA' qui glisse sur une courbe donnée AMB, en tournant autour d'un point fixe S. Cette courbe et cette droite sont respectivement la *directrice* et la *génératrice* de la

surface. Le point fixe S en est le centre (230) : car on conçoit que, si l'on prend de part et d'autre de ce point S deux distances égales SK, SK' sur la même génératrice, et que par les points K et K' on mène deux plans parallèles quelconques, le point S divisera en deux parties égales les portions de toutes les autres génératrices comprises entre ces deux plans.

On voit que la surface conique est composée de deux *nappes* qui sont engendrées respectivement par les parties indéfinies SA et SA' de la génératrice AA'.

585. Lorsque la directrice a un centre, la droite indéfinie menée par ce centre et celui de la surface conique se nomme l'*axe* de cette surface.

586. L'espace terminé d'une part par l'une des nappes d'une surface conique, et de l'autre par un plan quelconque, a reçu le nom de *cône*. L'aire de la section faite sur ce plan par la surface conique est la *base* du cône, le centre S en est dit le *sommet*, et la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le plan de la base est la *hauteur* du cône; enfin l'axe de la surface conique est aussi *l'axe* du cône.

587. Le cône est *droit* ou *oblique* suivant que son axe est perpendiculaire ou oblique au plan de sa base, et l'on dit qu'il est *circulaire* quand sa base est un cercle.

588. Un cône circulaire droit peut être regardé comme provenant de la révolution d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit : car dans le mouvement du triangle rectangle ASO autour de SO le côté AO décrit un cercle qui a Fig. 287.
pour centre le point O; la droite SA glisse donc sur la circonférence de ce cercle en tournant autour du point A, de sorte qu'elle engendre une nappe d'une surface conique.

Si donc *on fait tourner un angle qui n'est pas droit autour d'un de ses côtés, le côté mobile engendrera une nappe d'une surface conique circulaire droite.*

589. Il suit de la définition du n.° 584 que *toute surface conique est développable* : car deux génératrices consécutives sont toujours dans un même plan (574). Observons toutefois que la surface conique échappe à la génération indiquée au n.° 575 : car l'arête de rebroussement se réduit ici à un point.

590. Comme toutes les génératrices d'un cône droit sont

égales, on voit que si l'on conçoit sa surface fendue le long d'une de ces génératrices et qu'on l'étende sur un plan, le développement de cette surface sera un secteur A'S'B', dont le rayon S'A' sera égal à cette génératrice, et dont la base A'B' aura même longueur que la circonférence de la base du cône, de sorte que, pour déterminer le nombre de degrés de cette base A'B', on posera la proportion (a)

$$AO : SA :: x : 360.$$

Si, par exemple, AO et SA valaient respectivement $6^{c.m}$ et $10^{c.m}$, on trouverait que $x = 216°$. Ainsi, en faisant un angle de 216°, et décrivant entre ses côtés un arc dont le rayon eût 10 centimètres, on aurait le développement du cône donné. Tel est le procédé qu'emploient les ferblantiers et les appareilleurs.

Si maintenant on veut rouler ce secteur en cône, il n'y aura qu'à le courber sur une *forme* conique, de manière à rapprocher les deux rayons extrêmes S'A' et S'B', ce qui s'exécute de différentes manières, selon la nature de la matière dans laquelle le secteur a été taillé. Observons toutefois que, lorsque le cône doit être formé par superposition, il faut augmenter l'arc A'B' d'un ou deux millimètres.

591. Si le cône à développer est oblique et à base quelconque, on emploiera le procédé dont les artistes font ordinairement usage pour rectifier une circonférence (406), c'est-à-dire que l'on partagera le périmètre de cette base en un nombre assez grand de parties pour que l'on puisse regarder chacune d'elles comme une ligne droite, et l'on concevra que l'on ait joint tous ces points de division avec le sommet; puis on construira successivement à la suite les uns des autres tous les triangles dans lesquels on aura ainsi partagé la surface du cône, ce qui sera facile, puisque l'on peut mesurer les trois côtés de chacun; et, en faisant passer un trait continu par les extrémités des bases de tous ces triangles, le développement sera effectué.

Ordinairement le cône est donné uniquement par sa base, sa hauteur, et la projection de son sommet; mais alors les côtés issus du sommet de ce cône sont des hypothénuses de triangles rectangles qui ont pour hauteur commune celle même du cône, et

(a) On a évidemment : A'B' : *circ* S'A' :: x : 360, en appelant x le nombre de degrés de l'arc A'B'; mais A'B' = *circ* AO : donc (401) AO : SA :: x : 360.

pour bases les distances des différens points de division à la projection du sommet, de sorte que ces côtés sont faciles à construire.

THÉORÈME.

592. *Tout plan mené dans une surface conique par une de ses génératrices et un point quelconque de la directrice, la coupe suivant deux ou un plus grand nombre de génératrices.*

Il est clair en effet que les génératrices qui passent par les points où le plan dont il s'agit coupe la directrice, ont chacune deux points dans ce plan, et y sont par conséquent tout entières : elles sont donc les intersections de ce plan avec la surface conique.

THÉORÈME.

593. *Le plan conduit par une génératrice* SA *et la tangente* AT *menée par sa trace à la base d'un cône, renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on pourra tracer sur le cône par les différens points de cette génératrice, de sorte que ce sera le plan tangent au cône en l'un quelconque des points de* SA. Fig. 286.

On démontrera ce théorème en faisant voir que le plan SAT contient la tangente KV à une courbe quelconque KL tracée sur la surface conique. Pour cela je mène un plan par la génératrice SA, et un point M voisin de A : il coupera la surface conique suivant la droite SM et la courbe KL en un certain point N de celle-ci. Maintenant, si l'on fait tourner ce plan autour de SA de manière que le point M se rapproche de A, les sécantes AM et KN tourneront en même temps autour de A et de K; et quand la droite variable SM, qui contient les points M et N, coïncidera avec SA, les sécantes AM et KN seront devenues les tangentes respectives AT et KV; mais le plan mobile aura pris alors la position SAT; et, comme les deux sécantes sont toujours restées dans ce plan, on voit ainsi que la tangente KV est aussi dans le plan SAT. De plus ce plan est tangent à la surface conique (580) : donc, etc.

594. Scholie. Remarquons que si le point par lequel on veut mener un plan tangent à une surface conique était le centre même de cette surface, le problème serait impossible : car les diverses génératrices y sont elles-mêmes leurs propres tan-

gentes, et cependant elles sont deux à deux dans des plans différens.

Remarquons aussi que la démonstration du n.º 579 n'est pas applicable au centre de la surface conique : car la génératrice parallèle à la base du cône se resserre de plus en plus en approchant de ce centre, et finit par se réduire à un point : alors elle n'admet plus, à proprement parler, de tangente.

Il en est de même pour les surfaces de révolution dont le méridien coupe l'axe sous un angle nul ou différent d'un droit : en ces points de section il n'y a point de plan tangent.

THÉORÈME.

595. *Si l'on coupe une surface conique par deux plans parallèles, les intersections seront des courbes semblables dont le rapport de similitude sera celui même des parties d'une même génératrice comprises entre ces plans et son centre, et dont les aires seront proportionnelles aux carrés des distances des plans sécans au centre de la surface.*

Fig. 287. Menons, en effet, par le centre S une droite quelconque SO ; par cette droite, et une génératrice quelconque SA, un plan. Soient AO et A'O' ses traces sur les deux plans sécans. Les triangles SAO et S'A'O' seront équiangles, et par conséquent le rapport $\frac{AO}{A'O'}$ sera égal à celui de SA à SA'. Mais ce dernier est constant (521) : donc le premier l'est aussi ; donc les deux courbes d'intersection sont semblables, et leur rapport de similitude est effectivement $\frac{SA}{SA'}$.

Maintenant les aires des deux sections sont proportionnelles aux carrés des rayons vecteurs homologues AO et A'O' (466), et par conséquent aussi aux carrés des lignes SO et SO'. Si donc on a mené SO perpendiculaire au plan AOB, la seconde partie du théorème est démontrée.

596. Corollaire. Toute section faite parallèlement à la base d'un cône circulaire est un cercle dont le centre est sur son axe.

597. Si l'on place un écran devant un point lumineux, il est clair que tous les rayons de lumière qui viendront le frapper, formeront un cône dont ce point et cet écran sont le sommet

et la base; et que, si, après avoir disposé un second écran parallèlement au premier, on enlève toute la partie de cet écran qui n'est pas comprise dans le cône, les deux écrans recevront alors les mêmes rayons lumineux. Par conséquent les intensités de la lumière sur ces écrans seront en raison inverse de leurs aires, et par conséquent en raison inverse des carrés de leurs distances au point lumineux. Ainsi, en portant un écran à des distances 2, 3, 4.... fois plus grandes d'un point lumineux, cet écran sera 4, 9, 16... fois moins éclairé. Tel est le sens qu'il faut attacher à ce principe de physique, que *l'intensité de la lumière croît en raison inverse du carré de la distance.*

D'après cela, si l'on veut comparer entre elles les intensités de deux lumières, on admettra séparément ces deux lumières à travers deux tuyaux coniques réunis à leur sommet, et terminés par deux disques égaux d'un *même* papier blanc. Alors, en regardant les disques à la fois, ayant la tête enveloppée, pour exclure toute autre lumière, on fera éloigner ou rapprocher l'un des objets lumineux, jusqu'à ce que les disques paraissent également éclairés, et le rapport des intensités des deux lumières sera le rapport inverse des carrés de leurs distances à l'œil.

598. La portion d'un cône comprise entre deux plans parallèles se nomme *un tronc de cône à bases parallèles.* La hauteur de ce tronc est la distance des deux plans, et la portion de génératrice qu'ils interceptent en est dite l'arète ou la génératrice.

Il est évident qu'un tronc de cône droit à bases parallèles est engendré par un trapèze rectangle, tournant autour du côté qui est perpendiculaire à ses deux bases parallèles.

Le développement de la surface d'un tronc de cône s'effectue par la méthode des n.os 590 et 591.

THÉORÈME.

599. *Deux cônes droits sont tangens lorsque, leurs axes étant dans le même plan, ils ont une génératrice commune située dans ce plan.*

En effet, si par un point quelconque de la génératrice commune on mène deux plans perpendiculaires aux axes des deux cônes, ils couperont les deux surfaces coniques suivant deux circonférences de cercle dont chacune sera tangente à la com-

mune section de ces deux plans (535 et 114), au point même où ils coupent la génératrice dont il s'agit : donc les deux surfaces n'auront de commun que cette seule génératrice.

600. Ce théorème sert de base à la construction des *engrenages coniques* ou *roues d'angle*, dont on fait un si fréquent usage pour transmettre à un axe le mouvement circulaire qui se fait autour d'un autre axe qui ne lui est point parallèle. On
Fig. 288. conçoit en effet que le cône ASX ne pourra tourner autour de son axe sans faire tourner le cône ASY autour du sien. Pour déterminer les angles générateurs de ces cônes, la position des axes SX et SY étant fixée, on partagera l'angle XSY de manière que les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la droite de division SA sur les côtés soient en raison *inverse* des vîtesses de rotation que l'on veut imprimer à ces axes. On pourra alors construire ces cônes, ou plutôt les troncs de cônes droits qui doivent porter les dents, et l'on exécutera la division de l'engrenage sur les circonférences tracées au milieu de leur largeur.



CHAPITRE III.

DES SURFACES CYLINDRIQUES.

601. *On appelle* SURFACE CYLINDRIQUE *une surface engen-*
Fig. 289. *drée par une droite indéfinie* AA', *qui glisse sur une courbe donnée* CMB, *en restant constamment parallèle à elle-même.* Cette courbe et cette droite sont respectivement la *directrice* et la *génératrice* de la surface.

602. Lorsque la directrice a un centre, la parallèle menée par ce point aux génératrices se nomme l'*axe* de la surface cylindrique.

603. *L'espace compris entre deux plans parallèles et une surface cylindrique a reçu le nom de* CYLINDRE. Les aires des sections faites sur ces plans par la surface cylindrique sont les *bases* du cylindre, et la distance des deux bases est sa *hauteur;* enfin l'axe de la surface est aussi l'*axe* du cylindre.

604. Le cylindre est *droit* ou *oblique*, suivant que la géné-

ratrice de sa surface convexe est perpendiculaire ou oblique aux plans de ces bases, et l'on dit qu'il est *circulaire* quand ses bases sont des cercles.

605. Il suit des définitions des n.os 584 et 601 qu'une surface cylindrique peut être considérée comme une surface conique dont le centre est situé à l'infini : car alors toutes les génératrices de celles-ci deviennent parallèles. Par conséquent la surface cylindrique jouira de toutes les propriétés de la surface conique qui seront indépendantes de l'éloignement du centre de cette surface.

606. D'après cela *un cylindre pourra être regardé comme un tronc de cône à bases parallèles, dont le sommet est infiniment éloigné*. Donc *le cylindre droit circulaire est engendré par la révolution d'un rectangle autour d'un de ses côtés.*

607. *Toute surface cylindrique est développable* (574 ou 589), et son développement, si elle est droite, sera un rectangle (*a*) dont la hauteur sera celle même du cylindre, et dont les bases seront égales en longueur aux périmètres de ses bases (590). Rien ne sera donc plus facile que de construire le développement de la surface convexe d'un cylindre droit.

Mais si le cylindre est oblique, il n'y aura qu'à l'entourer d'un fil fortement tendu. Ce fil prendra évidemment la forme de la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface cylindrique, et de plus tous ses élémens seront perpendiculaires aux génératrices correspondantes, de sorte qu'en mesurant les parties de ces génératrices comprises entre le fil et l'une des bases, on pourra tracer (570) le développement de cette base. Mais si le cylindre n'était pas exécuté, ou si la surface courbe n'était pas convexe, il faudrait avoir recours aux procédés qu'enseigne la géométrie descriptive.

608. *Tout plan conduit par une génératrice et un point quelconque de la directrice coupe la surface cylindrique suivant deux ou un plus grand nombre de génératrices* (592).

(*a*) On conçoit en effet que chaque point du périmètre d'une base décrit un arc de circonférence dont le plan est perpendiculaire à la génératrice qui sert de charnière, et vient ainsi se rabattre sur l'intersection du plan de développement par le plan de cette base.

609. *Tout plan conduit par une génératrice et la tangente au point où elle perce la base du cylindre, renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on pourra tracer sur le cylindre par les différens points de cette génératrice, de sorte que ce plan touchera le cylindre en tous les points de cette génératrice* (593).

610. *Si l'on coupe une surface cylindrique par deux plans parallèles, les sections seront des courbes égales* (595) : car le rapport des rayons vecteurs homologues est ici l'unité, puisque ces rayons sont égaux comme parallèles comprises entre parallèles. Ainsi les deux bases d'un cylindre sont égales.

611. *Deux cylindres circulaires droits sont tangens lorsque, leurs axes étant parallèles, leurs surfaces ont une génératrice commune située dans ce plan* (599), *ou*, ce qui revient au même, *lorsque, leurs axes étant parallèles, la distance de ces axes est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.*

612. Il est évident que, si l'on dispose parallèlement les axes de deux cylindres circulaires droits, de manière que la distance de ces axes soit plus grande que la somme de leurs rayons, leurs surfaces couperont toujours le plan des axes suivant les deux mêmes parallèles, lorsqu'on les fera tourner. Si donc, ayant imprimé à deux pareils cylindres des mouvemens contraires, on fait passer entre eux une masse de matière susceptible de s'étendre, elle s'alongera en une plaque ayant pour épaisseur l'excès de la distance des axes sur la somme des deux rayons. Tel est le mécanisme des *laminoirs.*



CHAPITRE IV.

DE LA SURFACE SPHÉRIQUE.

613. LA SURFACE SPHÉRIQUE *est celle dont tous les points sont également distans d'un point que l'on nomme* CENTRE, *et l'espace enveloppé par cette surface s'appelle* SPHÈRE.

Les droites qui vont du centre à la surface se nomment *rayons*; et toute droite qui, passant par le centre, va se terminer à la surface, est un *diamètre.*

Tous les rayons sont égaux ; il en est de même des diamètres.

614. Il suit évidemment de cette définition que *la surface sphérique est engendrée par la révolution d'une demi-circonférence autour de son diamètre.*

Ainsi l'on peu' exécuter une sphère avec des feuilles de métal ou de carton taillées d'après la méthode du numéro 570. C'est ainsi qu'on s'y prend pour confectionner les globes destinés à l'étude de la géographie et de l'astronomie, et les aérostats. Dans cette dernière machine la direction des méridiens est marquée par des fils de fer auxquels on attache les *côtes* de taffetas enduit d'un vernis fait avec de la gomme élastique dissoute à chaud dans de l'essence de térébenthine.

615. *On appelle* CALOTTE *la portion de la surface sphérique détachée par un plan.* La calotte est engendrée par un arc AC qui tourne autour d'un diamètre CD mené par une de ses extrémités. La circonférence décrite par l'autre extrémité A de l'arc est la *base* de la calotte, et la projection CI de l'arc générateur sur l'axe en est la *hauteur.* Fig. 290.

616. *L'espace compris entre la calotte et le plan de sa base se nomme* SEGMENT *sphérique.*

617. *Une* ZONE *est une portion de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles.* Elle est engendrée par un arc AF qui tourne autour d'un diamètre CD qui ne rencontre pas cet arc. Les circonférences décrites par les extrémités de cet arc sont les bases de la zone, et sa projection sur l'axe en est la *hauteur.*

618. *L'espace compris entre une zone et les plans qui la déterminent est ce qu'on nomme une* TRANCHE *sphérique.*

619. *Un* FUSEAU *est la portion* CGDN *de la surface sphérique comprise entre les faces d'un angle dièdre dont l'arète passe par le centre de la sphère ; et la partie de la sphère comprise entre le fuseau et les faces de ce dièdre est un* COIN.

620. *Un* SECTEUR *sphérique est le corps engendré par un secteur circulaire* AOC *qui tourne autour de l'un des rayons qui le limitent,* de sorte qu'il se compose d'un cône et d'un segment adossés par leur base commune.

THÉORÈME.

Fig. 291. 621. *Quatre points* A, B, C, D, *qui ne sont pas situés dans un même plan, déterminent une sphère.*

Soient F et G les centres respectifs des deux circonférences que l'on ferait passer par les points A, B, C, et C, D, A. Elevons en ces points les perpendiculaires FI et GK aux plans de ces circonférences, et je dis qu'elles se couperont. Si nous abaissons, en effet, des perpendiculaires des points F et G sur AC, elles iront concourir au milieu M de cette droite (102), et détermineront un plan perpendiculaire à AC (484), et partant aux plans ABC et ACD (532) : donc les perpendiculaires FI et GR à ces plans respectifs seront dans le plan FMG (534); donc elles se couperont, sans quoi FM, qui est perpendiculaire sur FI, le serait aussi à sa parallèle GK. Mais MG l'est déja sur cette droite : donc on aurait du point M deux perpendiculaires MF et MG sur la même droite GK, ce qui est absurde, à moins que MF et MG ne coïncident. Mais alors les plans ABC et ADC auraient deux droites communes FMG et AC, et ainsi n'en feraient qu'un seul, ce qui est contre l'hypothèse : donc les droites FI et GK se coupent en un certain point O. Ce point, comme appartenant à la première, est équidistant des trois points A, B, C; il est aussi également distant des points A, C, D, puisqu'il se trouve sur la seconde : donc il est à la fois équidistant des quatre points A, B, C, D. Donc la surface sphérique décrite du point O comme centre avec le rayon OA passera nécessairement par ces quatre points. Donc par quatre points qui ne sont pas situés dans un même plan, on peut toujours décrire une surface sphérique.

Je dis maintenant que l'on ne pourra en faire passer *qu'une* seule. Imaginons, en effet, une seconde surface sphérique par les quatre points A, B, C, D. Son centre sera nécessairement sur la perpendiculaire FI, sans quoi, le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur le plan ABC étant différent du point F, ce centre ne serait pas équidistant des trois points A, B, C. Par la même raison il se trouvera aussi sur la perpendiculaire GK, et coïncidera par conséquent avec le point O. Les deux surfaces sphériques auront donc le même centre et le même rayon, et par conséquent n'en feront qu'une.

622. SCHOLIE. Si les quatre points A, B, C, D, sont dans un

même plan, les deux perpendiculaires FI et GK seront parallèles; et, comme le centre de la surface sphérique qui passe par ces quatre points doit être sur chacune d'elles, ainsi que nous venons de le prouver, on voit qu'il sera impossible de décrire une pareille surface par les quatre points A, B, C, D, à moins que FI et GK ne coïncident, ce qui exige que les quatre points se trouvent sur une même circonférence; et en effet tous les points de la perpendiculaire élevée par son centre sur son plan en sont équidistans.

THÉORÈME.

623. *Toute section* AMB *faite dans une surface sphérique par un plan est une circonférence de cercle; et si du centre* O *de la surface on abaisse une perpendiculaire* OI *sur ce plan, elle passera par le centre de la circonférence, et percera* par conséquent la *surface en deux points* C *et* D, *dont chacun sera également éloigné de tous les points de cette circonférence, et que l'on appelle ses* PÔLES. Fig. 290.

En effet, si l'on mène des rayons à tous les points de la courbe d'intersection AMB, ces rayons seront des obliques égales sur le plan de cette courbe, et par conséquent tous ces points seront équidistans du pied de la perpendiculaire OI : donc AMB est une circonférence dont I est le centre; donc les points C et D sont chacun également éloignés de tous les points de cette circonférence.

624. COROLLAIRE. Si l'on observe que dans le triangle rectangle OIM on a :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IM}^2,$$

on verra que, la somme des carrés des deux droites OI et IM étant constante, si l'une de ces lignes augmente ou diminue, l'autre diminue ou augmente en même temps; d'où il suit,

1.° Qu'un cercle de la sphère est d'autant plus grand ou plus petit que son plan passe plus près ou plus loin du centre de ce corps;

2.° Que, quand il passe par ce point, il a le même centre et le même rayon que la *sphère*. C'est là son *maximum* : car la distance OI est alors *minimum*.

De là la distinction des cercles de la sphère en *grands* et en *petits cercles*. On *appelle grand cercle celui dont le plan*

passe par le centre de la sphère, et petit cercle celui dont le plan n'y passe point;

3.° Que *deux petits cercles égaux sont équidistans du centre de la sphère, et réciproquement; et que de deux cercles inégaux le plus grand est le plus près du centre, et réciproquement.*

625. Il suit de la définition des grands cercles de la sphère,

1.° *Que tous les grands cercles sont égaux;*

2.° *Que deux grands cercles se coupent en deux parties égales :* car leur ligne d'intersection est un diamètre commun à tous deux, puisqu'elle passe par le centre de la sphère;

3.° *Que par deux points donnés sur une surface sphérique on peut toujours faire passer un arc de grand cercle, mais que l'on ne peut en faire passer qu'un seul,* puisque les deux points donnés et le centre de la sphère déterminent un plan. Cependant, si les deux points donnés étaient les extrémités d'un diamètre, on pourrait les joindre par une infinité d'arcs de grands cercles, puisque par une même droite on peut conduire une infinité de plans.

4.° *Tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales qu'on nomme* HÉMISPHÈRES : car, si, après avoir renversé l'une des deux parties, on la place sur l'autre, en faisant coïncider leurs bases, les surfaces qui les terminent devront se recouvrir exactement, sans quoi tous leurs points ne seraient plus à la même distance du centre.

626. SCHOLIE I. *La perpendiculaire abaissée du centre d'une sphère sur un plan sécant quelconque satisfait aux cinq conditions suivantes :* 1.° *passer par le centre de la sphère;* 2.° *être perpendiculaire au plan sécant;* 3.° *passer par le centre du cercle d'intersection;* 4.° *et* 5.° *passer par chaque pôle de ce cercle.* Comme deux quelconques de ces conditions suffisent pour déterminer une ligne droite, il en résulte que *toute droite qui satisfera à ces deux conditions satisfera en même temps aux trois autres* (103).

627. SCHOLIE II. *Si l'on joint un pôle d'un cercle avec les différens points de sa circonférence par des arcs de grand cercle, tous ces arcs seront égaux* comme sous-tendus par des cordes égales, et de plus ils seront perpendiculaires à la circonférence (532) : car on dit qu'un arc est perpendiculaire sur

l'un autre quand leurs plans se coupent à angles droits (on verra plus tard (632) la raison de cette dénomination).

L'arc de grand cercle CN *qui va d'un pôle d'un grand cercle* FNG *à sa circonférence, est un* QUADRAN (désormais nous emploierons ce mot pour désigner le quart d'une circonférence de grand cercle) : car l'arc CN est compris entre les côtés d'un angle droit CON, et décrit de son sommet O comme centre.

THÉORÈME.

628. *Si l'on fait tourner une pointe d'un* COMPAS SPHÉRIQUE (on appelle ainsi un compas à pointe recourbée) *autour d'une de ses pointes fixées en* C, *sur la sphère, l'autre pointe, en glissant sur sa surface, y décrira une circonférence dont la pointe fixe occupe un des pôles.*

Menons, en effet, le diamètre CD, et joignons ses deux extrémités avec tous les points A, M, B.... de la courbe décrite. Les droites CA, CM, CB..... sont toutes égales par construction : donc les arcs de grand cercle qu'elles sous-tendent sont égaux; et, comme les demi-circonférences CAD, CMD, CBD... sont égales, les arcs restans DA, DM, DB... sont égaux, et par conséquent leurs cordes sont égales; donc les triangles CAD, CMD, CBD..... sont équilateraux entr'eux; donc les perpendiculaires abaissées de leurs sommets A, M, B.... sur la base commune CD iront la couper au même point I, et déterminent ainsi un plan perpendiculaire au diamètre CD. La courbe AMB est donc bien une circonférence dont C et D sont les pôles.

Remarquons que, si l'ouverture du compas sphérique est égale à la corde qui sous-tend un quadran, les perpendiculaires abaissées des points A, M, B.... sur le diamètre CD, iront concourir au centre O de la sphère, de sorte que la courbe décrite est une circonférence de grand cercle.

629. Le principe que nous venons d'établir donne le moyen de tracer des circonférences de cercle sur une sphère aussi facilement que sur un plan. *Veut-on,* par exemple, *faire passer une circonférence de grand cercle par deux points donnés* N *et* G, il ne s'agira que d'en chercher un pôle. Or ce pôle est distant d'un quadran de chacun des deux points donnés : donc, si des points N et G comme pôles, et avec une ouverture de compas sphérique égale à la corde d'un quadran, nous décrivons deux

circonférences, leurs points d'intersection C et D seront *les* pôles de la circonférence demandée, que l'on décrira en faisant tourner le compas autour d'une de ses pointes fixée en C ou en D.

630. *Veut-on encore mener par un point donné un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc de grand cercle donné* NG, on coupera cet arc, prolongé s'il est nécessaire *(629)*, par un autre décrit du point donné comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadran, et le point de section sera le pôle de l'arc demandé, qu'il sera alors facile de décrire.

Si l'arc donné appartient à un petit cercle AMB, on *déterminera* d'abord sur cet arc deux points M et B *également distans* du point donné C, puis un second point P *équidistant de* ces deux-là, et il ne s'agira plus que de faire passer un arc de grand cercle par les points C et P. On conçoit en effet que, si l'on joint les trois points C, P et O avec le milieu de la corde MB par des lignes droites, ces droites seront perpendiculaires à cette corde, et détermineront ainsi un plan qui lui sera perpendiculaire, et dont l'intersection avec la sphère sera un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc AMB.

Les deux problèmes que nous venons de résoudre exigent que l'on connaisse la corde d'un quadran, et, pour cela, le rayon de la sphère. Il convient donc de nous occuper de cette recherche.

PROBLÈME.

631. *Une sphère étant donnée, trouver son rayon.*

Fig. 292. Marquons sur la surface sphérique trois points A, B, C, à égale distance d'un point quelconque P de cette surface. Le plan déterminé par ces trois points coupera la sphère *suivant un* cercle dont P sera le pôle. Soit D son centre, *AD sera* son rayon. Nous obtiendrons ce rayon en construisant un triangle A'B'C' dont les trois côtés soient égaux aux trois distances respectives AB, AC et BC, et circonscrivant une circonférence à ce triangle : car il est clair que ce cercle et celui déterminé par les trois points A, B, C, sont superposables. Nous connaîtrons donc actuellement l'hypothénuse AP et la base AD du triangle rectangle APD : ainsi il sera facile de construire le triangle A'P'D' égal à APD, ce qui déterminera l'angle P. Mais, si dans le plan APO

nous concevons une perpendiculaire sur le milieu de AP, elle ira passer par le centre O de la sphère, et l'on aura un triangle rectangle PFO, dont nous connaissons l'angle P et le côté PF, moitié de AP. Ainsi, en élevant une perpendiculaire F'O' sur le milieu de P'A', nous formerons le triangle rectangle P'F'O' égal à PFO : donc P'O' = PO; donc P'O' est le rayon de la sphère.

Si l'on élève au point O' une perpendiculaire O'Q' = O'P' sur O'P', la distance P'Q' sera l'ouverture qu'il faudra donner au compas sphérique pour décrire des grands cercles sur la sphère.

632. Une courbe n'étant autre chose qu'une brisée dont les côtés sont infiniment petits, on voit que la mesure naturelle de l'inclinaison de deux courbes qui se coupent est l'angle formé par les deux élémens qui correspondent à leur point d'intersection, c'est-à-dire par les tangentes menées à chaque courbe en ce point. Nous dirons donc que l'*angle formé par deux courbes qui se coupent est celui même que forment les tangentes à leur point de section.*

Ainsi *l'angle formé par les deux arcs de grand cercle* CGD *et* CND *est précisément l'angle* SCT *formé par leurs tangentes* CT *et* CS. Or cet angle est la mesure du dièdre GCDN que font leurs plans : donc on peut prendre l'un pour l'autre. C'est dans ce sens que l'on dit que *l'angle de deux arcs de grand cercle est l'angle dièdre que font leurs plans.* Fig. 290.

Si du point C comme pôle, et avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadran, on décrit l'arc GN entre les côtés de l'angle sphérique C, et que l'on tire les rayons ON et OG, on formera un angle NOG, qui aura pour mesure l'arc GN. Mais cet angle est égal à SCT (516) : donc *l'angle formé par deux arcs de grand cercle a pour mesure l'arc compris entre eux, et décrit de son sommet comme pôle.*

THÉORÈME.

633. *Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon mené au point de contact.*

En effet on peut le regarder comme déterminé par les tangentes CS et CT à deux circonférences de grand cercle tracées par le point C; or ces deux tangentes sont perpendiculaires au rayon CO (108) : donc le plan tangent est lui-même perpendiculaire à CO.

THÉORÈME.

634. Réciproquement, *tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère.*

Car, si par le rayon OC on mène deux plans quelconques leurs traces sur le plan donné seront tangentes aux grands cercles suivant lesquels ils coupent la sphère : donc le plan tangent coïncide avec le plan dont il s'agit.

THÉORÈME.

635. *L'intersection de deux sphères est un cercle, et la droite qui joint les centres est perpendiculaire au plan de ce cercle, et passe par son centre.*

En effet, si l'on joint chaque point de la courbe d'intersection avec les centres des deux sphères, on formera une infinité de triangles isocèles équilatéraux entre eux : donc les perpendiculaires abaissées de leurs différens sommets sur leur base commune, c'est-à-dire sur la droite qui joint les centres, seront égales, et iront la couper au même point; elles formeront donc un cercle dont le centre est sur cette droite, et dont le plan lui est perpendiculaire.

THÉORÈME.

636. *Pour que deux sphères se touchent, il faut et il suffit que la distance des centres soit égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.*

Voyez les démonstrations des n.os 167, 168, 169 et 170.

THÉORÈME.

637. *Pour que deux sphères se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit plus petite que la somme de leurs rayons, et plus grande que leur différence.*

Voyez la démonstration du n.° 172.

638. *On appelle* TRIANGLE SPHÉRIQUE *la portion de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle moindres chacun qu'une demi-circonférence* (*a*). Les plans

---

(*a*) Il existe cependant des triangles sphériques dont les côtés sont plus grands qu'une demi-circonférence de grand cercle : car, si l'on achève la circonférence dont AB fait partie, et que de l'hémisphère CABD on retranche le
Fig. 293.

de ces grands cercles forment un trièdre dont le sommet est au centre de la sphère, et dont les faces et les dièdres ont pour mesures respectives les côtés et les angles correspondans de ce triangle. Ainsi *la théorie des triangles sphériques se ramène immédiatement à celle des angles trièdres.* De cette remarque découlent, comme conséquences immédiates, les propositions suivantes :

THÉORÈME.

639. *Dans tout triangle sphérique un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Car, une face quelconque d'un trièdre étant plus petite que la somme des deux autres (547), on voit que sa mesure est plus petite que la somme des mesures de ces deux autres.

THÉORÈME.

640. *Dans tout triangle sphérique la somme des trois côtés est plus petite que la circonférence d'un grand cercle.*

Car, la somme des trois faces d'un trièdre étant moindre que quatre droits (548), la somme de leurs mesures est moindre que la mesure de quatre droits, c'est-à-dire que la circonférence d'un grand cercle.

THÉORÈME.

641. *La somme des angles de tout triangle sphérique est plus grande que deux droits, et plus petite que six droits* (549).

642. Corollaire. La somme des angles d'un triangle sphérique n'est pas constante comme celle des angles d'un triangle rectiligne ; ainsi deux angles donnés ne déterminent pas le troisième, et un triangle sphérique peut avoir deux ou trois angles droits ou obtus.

---

triangle ABC, dont les trois côtés sont supposés satisfaire à la définition, la portion restante ADBC, comprise entre les trois arcs de grand cercle ADB, AC et BC, sera ainsi un triangle sphérique ; mais le côté ADB est plus grand qu'une demi-circonférence. Toutefois on voit que, si l'on connaissait les angles et les côtés du triangle ABC, on aurait immédiatement les angles et les côtés du triangle ADBC. C'est pour cela que l'on a exclu de la définition des triangles sphériques ceux qui sont tels que celui-ci.

THÉORÈME.

643. *Dans tout triangle sphérique le plus grand angle est opposé au plus grand côté, et, réciproquement, le plus grand côté est opposé au plus grand angle* (550).

THÉORÈME.

644. *Dans un triangle sphérique isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux; et, réciproquement, si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux* (551).

THÉORÈME.

645. *Deux triangles sphériques appartenant à la même sphère ou à des sphères égales sont égaux dans quatre cas, savoir :*

1.° *Lorsque leurs côtés sont égaux chacun à chacun;*

2.° *Lorsque leurs dièdres sont égaux chacun à chacun;*

3.° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun;*

4.° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;*

Et qu'en outre leurs parties homologues sont semblablement disposées.

On conçoit en effet que, les trièdres correspondans à ces deux triangles étant superposables, ces triangles le seront aussi.

646. Scholie. Si les élémens dont l'égalité constitue celle des deux triangles, sont disposés dans un ordre inverse, ces deux triangles auront encore toutes leurs parties homologues égales; mais, comme ils ne sont plus superposables, on dit *qu'ils sont symétriques.*

THÉORÈME.

Fig. 294. 647. *Deux triangles sphériques* ABC *et* A'B'C' *symétriques sont équivalens.*

En effet, si l'on reprend la construction du n.° 560, on verra que les trièdres égaux SAOB et S'A'O'B', SAOC et S'A'O'C', SBOC et S'B'O'C', intercepteront sur la sphère des triangles égaux; et, comme les triangles ABC et A'B'C' seront composés

de la même manière avec ces triangles partiels, on devra en conclure qu'ils sont égaux.

THÉORÈME.

648. *La ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface d'une sphère d'un point A à un autre B, est l'arc de grand cercle qui les unit.* Fig. 295.

Première démonstration. Soit AMB cette ligne. Je dis d'abord que, si l'on prend deux autres points quelconques N et P sur cette courbe, la ligne NMP sera aussi la plus courte que l'on puisse tirer du point N au point P : car, s'il n'en était pas ainsi, et que NQP fût ce plus court chemin de N en P, il est clair que ANQPB serait plus petit que AMB, ce qui est contre l'hypothèse. Or cela est vrai quelle que soit la longueur de l'arc NMP : ainsi il s'agit de déterminer quelle doit être la forme de la courbe AMB, pour que la somme de deux quelconques de ses élémens consécutifs soit la plus petite possible. Soient donc NM et MP deux de ces élémens. Menons aux points N et P deux plans tangens à la sphère : les élémens NM et MP seront tout entiers dans ces plans, qui se couperont suivant une certaine droite RMS. Alors, s'ils ne sont pas perpendiculaires à cette droite, on pourra toujours tirer deux perpendiculaires NQ et QP à cette intersection (*a*), de sorte qu'on aura :

$$NQ + QP < NM + MP.$$

Mais, si MN et MP étaient perpendiculaires à RS, on aurait, au contraire :

$$NQ + QP > NM + MP,$$

Q étant toujours un point infiniment près de M. Donc *la propriété du* MINIMUM *appartient aux deux élémens* qui sont perpendiculaires à l'intersection de deux plans tangens consécutifs, ou, autrement, aux deux élémens *dont le plan est perpendiculaire au plan tangent mené à leur point commun :* car cette intersection est dans ce plan (*b*). Or le rayon qui va

(*a*) Il pourrait se faire que l'une des perpendiculaires ne tombât pas précisément au point N ou au point P; mais, comme elle irait passer entre ce point et le point M, la conséquence serait toujours la même.

(*b*) On voit ainsi qu'il est normal à sa surface; de là ce théorème, que l'on ne démontre ordinairement que par *le calcul des variations.*

La ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface entre deux points donnés est celle dont le plan de deux élémens consécutifs, c'est-à-dire, LE PLAN OSCULATEUR, *est partout* NORMAL *à cette surface.*

au point M, étant perpendiculaire au plan tangent, est dans le plan des deux élémens NM et MP, lequel passe en conséquence par le centre de la sphère: ainsi le plan de deux élémens consécutifs de la ligne AMB a de commun avec celui déterminé par l'un de ces élémens et le suivant, une *droite et un point* commun; donc tous les points de cette courbe sont *dans* un même plan qui passe par le centre de la sphère; donc AMB est un arc de grand cercle.

Deuxième démonstration. Supposons que la ligne la plus
Fig. 296. courte que l'on puisse tirer sur la sphère du point A au point B soit une certaine ligne ACDEB différente de l'arc de grand cercle AMB. Prenons sur cette ligne un point quelconque *D, et,* ayant joint le point B au centre O de la sphère, faisons *tourner* le plan DBO autour de OB : il est clair que, comme tout est symétrique sur la surface de la sphère par rapport au point B, la ligne DM décrite par le point D aura tous ses points équidistans de B. Si donc ANMPB est le plus court chemin pour aller sur la sphère du point A au point B, en passant par le point M, on aura DEB = MPB, et par conséquent

$$ACD < ANM. \ldots\ldots (1):$$

car, par hypothèse, ACDEB est une ligne plus courte que ANMBP. Or, si l'on joint le point D avec les points A et B par des arcs de grand cercle, le côté AB du triangle sphérique ABD sera plus petit que la somme des deux autres AD et DB : donc, en retranchant d'une part MB, et de l'autre son égale DB, il restera AD > AM (*a*). Par conséquent, si l'on fait tourner le plan

---

Il suit de là que, quand un fil est tendu sur une surface, il affecte la forme de la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface par ses *deux* extrémités. Supposons que AMB soit ce fil. La pression qu'il exerce en M *sur* la surface, est produite par les tensions qu'éprouvent ses deux élémens NM et MP, et est par conséquent dirigée dans le plan de l'angle NMP; mais elle est perpendiculaire à la surface, sans quoi le fil glisserait sur cette surface: donc le plan des deux élémens MN et MP, c'est-à-dire le plan osculateur de la courbe AB au point M, est normal à la surface; donc cette courbe jouit, entre les points N et P, de la propriété du minimum; donc elle en jouit aussi dans toute son étendue.

(*a*) Ceci suppose que le point M est entre A et B; or, s'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à faire tourner le plan ABO autour du rayon BO, et la courbe décrite par le point A serait enveloppée par celle que le point D a tracée: d'où il s'ensuivrait que le point A serait plus près de B que ne l'est le point D., ce qui est contre l'hypothèse.

BAO autour du rayon AO, la courbe décrite par le point D enveloppera le point M, et par suite celle que décrirait ce point si l'on faisait tourner le plan BAO autour du même rayon AO : donc le point D est plus éloigné du point A que le point M, ce qui est contraire à l'inégalité (1). On ne pouvait donc pas supposer qu'il y eût du point A au point B une ligne plus courte que l'arc de grand cercle AMB : donc cet arc est le plus court chemin pour aller du point A au point B.

649. Une des applications les plus intéressantes des propriétés de la sphère est celle que les géographes en ont faite. Nous allons en donner une idée succincte.

Tout le monde sait que la terre tourne sur elle-même en vingt-quatre heures, ce qui produit les alternatives des jours et des nuits, et que ce mouvement s'exécute autour d'une certaine ligne *idéale* passant par son centre, et que l'on nomme son *axe*. Les points où cet axe perce la surface terrestre se nomment les *pôles* de la terre : l'un s'appelle le pôle *nord* ou *boréal*, et l'autre le pôle *sud* ou *austral*. Un plan mené par le centre de la terre perpendiculairement à son axe, la coupe suivant un grand cercle auquel on donne le nom d'*équateur*, non point parce qu'il divise la sphère en deux parties égales : car c'est une propriété dont jouissent tous les grands cercles, mais parce que le jour est égal à la nuit par toute la terre lorsque le soleil se trouve dans son plan. Enfin on appelle *méridien* tout grand cercle qui passe par les deux pôles. Chaque point de la terre a donc son méridien. Parmi cette infinité de méridiens il en est un que l'on nomme *le premier méridien* : c'est pour chaque peuple celui qui passe par son observatoire principal ; ainsi, en France, le premier méridien est celui qui traverse l'observatoire de Paris.

On appelle LATITUDE *d'un lieu l'arc de méridien compris entre ce lieu et l'équateur*, et l'on dit que la latitude est boréale ou australe suivant que le lieu dont il s'agit est situé dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral. Or, si l'on imagine par un point du globe un cercle *parallèle* à l'équateur, tous les points de sa circonférence auront la même latitude, et de plus seront les seuls qui jouiront de cette propriété. Donc *la latitude d'un lieu détermine le* PARALLÈLE *sur lequel il est situé*.

On nomme LONGITUDE *d'un lieu l'arc de l'équateur compris entre son méridien et le premier méridien.* En regardant ce premier méridien comme dirigé du sud au nord, on dit que la longitude est orientale ou occidentale, suivant que le lieu dont il s'agit est situé à l'*est* ou à l'*ouest* de ce cercle. Or tous les points du demi-méridien sur lequel se trouve un *lieu ont* la même longitude, et de plus sont les seuls qui jouissent de cette propriété : donc *la connaissance de la longitude d'un lieu détermine la moitié du méridien sur laquelle il est placé.*

Ainsi l'on voit qu'un point du globe terrestre est déterminé quand on connaît à la fois sa latitude et sa longitude. Pour faciliter cette détermination, on divise l'équateur en 360°, savoir : 180 à l'est, et 180 à l'ouest, à partir de l'une de ses intersections avec le premier méridien ; et la moitié de celui-ci en 180°, savoir : 90° vers le nord, et autant vers le sud, à partir de cette même intersection, qui est ainsi numérotée *zéro*. D'après cela, si l'on veut figurer sur un globe le point de la terre dont la latitude est 45° boréale, et la longitude 15° orientale, on fixera une pointe du compas sphérique au pôle boréal, et l'on amènera l'autre au point numéroté 45 sur le premier méridien. Faisant alors tourner le compas, on décrira sur la sphère le parallèle du lieu demandé. On placera ensuite une pointe du compas au point de l'équateur numéroté 15 du côté de l'est ; et, ayant amené l'autre pointe à 90° de là, c'est-à-dire à 105°, on n'aura qu'à faire mouvoir le compas autour de cette seconde pointe, de l'équateur au pôle, pour décrire le quart du méridien du lieu cherché. Son intersection avec le parallèle résoudra le problème. Tel est le procédé par lequel on construit des globes qui représentent fidèlement la position des points remarquables de la surface terrestre, comme la situation des villes, le cours des rivières et des fleuves, la direction des chaînes de montagnes, le contour des mers, etc.

Fig. 290. Un point étant déterminé, quand on connaît sa latitude et sa longitude, on voit qu'il doit être possible de déterminer la distance de deux lieux M et E donnés par leurs longitudes et leurs latitudes. En effet, si l'on conçoit qu'on ait tracé leurs méridiens, il est clair que la différence de leurs longitudes s'ils sont d'un même côté du premier méridien, ou leur somme s'ils sont de côtés différens de ce plan, sera l'angle de ces méridiens (632). Mais, si l'on conçoit aussi le plan du grand cercle qui joint les deux

lieux, on formera au centre de la terre un trièdre OCEM, dans lequel on connaîtra deux faces COE et COM, et le dièdre compris ECOM : car elles ont pour mesures les complémens des latitudes des points E et M, et ce dièdre est mesuré par l'arc NG, qui est la différence ou la somme de leurs longitudes. En construisant donc la troisième face de ce trièdre, il ne s'agira plus que de trouver la longueur de l'arc qui en sera la mesure (435).



TROISIÈME PARTIE.

DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

DES POLYÈDRES.

650. *On appelle* POLYÈDRE *un corps terminé de toutes parts par des plans.* Ces plans se coupent deux à deux suivant des lignes droites : de sorte que le polyèdre se trouve ainsi *limité* par une série de polygones que l'on nomme ses *faces*, et dont l'ensemble forme sa *surface*. Les côtés de ces faces sont les *arètes* du polyèdre, et ses *sommets* sont ceux mêmes de ses angles polyèdres. Enfin on appelle *diagonale* la droite qui joint deux sommets non adjacens à la même face.

651. Un polyèdre est *convexe* ou à *angles saillans* lorsqu'une ligne droite ne peut rencontrer sa surface en plus de deux points ; dans le cas contraire il est *concave* ou à *angles rentrans*.

652. On classe les polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi on appelle

tétraèdre un polyèdre qui a 4 faces,
pentaèdre................. 5
hexaèdre.................. 6
etc.

On ne pousse guère cette nomenclature au delà du polyèdre de huit faces que pour le *dodécaèdre* et l'*icosaèdre*, polyèdres de *douze* et de *vingt* faces.

Remarquons que *le tétraèdre est le plus simple des polyèdres* : car il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre, et ces trois plans laissent un vide que l'on ne peut fermer qu'à l'aide d'un quatrième plan. Il est clair que les faces du tétraèdre sont des triangles.

THÉORÈME.

Fig. 297. 653. *Deux tétraèdres* SABC et S'A'B'C' *sont égaux lorsqu'ils ont leurs arètes égales chacune à chacune, et que les*

ces formées par les arètes homologues sont semblablement lacées.

Il suit immédiatement de cet énoncé que le trièdre S, par xemple, est égal au trièdre S' (351 et 553), de sorte qu'en superposant ces deux trièdres, les deux tétraèdres auront leurs ommets confondus, et par conséquent coïncideront parfaitement.

THÉORÈME.

654. *Deux tétraèdres* SABC *et* S'A'B'C' *sont égaux lorsqu'ils ont un dièdre égal* AB=A'B' *compris entre deux triangles* SAB *et* S'A'B', ABC *et* A'B'C', *égaux chacun à chacun et semblablement placés.*

C'est la démonstration même du n.o 199.

THÉORÈME.

655. *Deux tétraèdres* SABC *et* S'A'B'C' *sont égaux lorsqu'ils ont une face égale* ABC = A'B'C', *adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun, et dont les faces homologues sont semblablement placées.*

C'est la démonstration même du n.o 201.

656. Les tétraèdres sont dans l'espace ce que les triangles sont sur un plan. Ainsi, de même que l'on détermine la position d'un point sur un plan en le liant par un triangle à deux autres points donnés sur ce plan, de même aussi on fixe la position d'un point dans l'espace en le liant par un tétraèdre avec trois autres points donnés: d'où il suit qu'un polyèdre quelconque sera déterminé en donnant les sommets de trois de ses angles polyèdres, et leurs distances à tous les autres (653) : de sorte qu'en désignant par S le nombre total de ses sommets, sa détermination exige que l'on connaisse les $3(S-3)$ lignes qui vont aboutir aux sommets du triangle que l'on a choisi pour base, et en outre les trois côtés de ce triangle, ce qui fait en tout $3(S-3)+3=3(S-2)$ données. Observons toutefois que Legendre a reconnu que le nombre de ces données peut être beaucoup moindre que $3(S-2)$.

657. *On appelle* PYRAMIDE *un polyèdre dont une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres sont des triangles qui ont leur sommet au même point.* Ainsi SABCDE est une pyramide dont le polygone ABCDE est la Fig. 298.
base, et S le *sommet*. La perpendiculaire SO, abaissée du sommet sur la base, est la *hauteur* de la pyramide.

Une pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc., selon que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, etc. Une pyramide triangulaire n'est autre chose qu'un tétraèdre.

658. Si l'on observe que la surface latérale d'une pyramide peut être engendrée en faisant glisser sur le contour de sa base une ligne droite assujettie à passer par son sommet, on en conclura qu'un cône n'est qu'une pyramide dont la base a un nombre infini de côtés infiniment petits.

659. *Une pyramide est* RÉGULIÈRE *lorsque sa base est un polygone régulier, et qu'en même temps son sommet se projette au centre des cercles inscrit et circonscrit à ce polygone.*

660. Si l'on construit deux cônes qui aient ces cercles pour bases, et pour sommet commun celui même de la pyramide, il est clair que le premier touchera chaque face latérale de cette pyramide (593) suivant la ligne qui va du sommet au milieu de la base de cette face, et que les arètes de la pyramide seront des génératrices du second cône. En conséquence on dit que ces cônes sont *inscrit* et *circonscrit* à la pyramide, et la génératrice du premier se nomme l'*apothême* de cette pyramide.

THÉORÈME.

661. *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, les arètes et toutes les lignes issues du sommet seront coupées par ce plan en parties proportionnelles* (521); *la section sera un polygone semblable à la base, et leurs aires seront proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier de celui du n.º 595.

662. Corollaire. *Si les bases de deux pyramides de même* Fig. 208. *hauteur* SO *et* TH *sont sur un même plan, les aires des sections* A'B'C'D'E' *et* F'G'I'K', *faites dans ces pyramides par un plan parallèle à celui-là, seront proportionnelles aux bases* ABCDE *et* FGIK.

On a en effet les deux proportions

$$\text{ABCDE} : \text{A'B'C'D'E'} :: \overline{\text{SO}}^2 : \overline{\text{SO'}}^2,$$
$$\text{FGIK} : \text{F'G'I'K'} :: \overline{\text{TH}}^2 : \overline{\text{TH'}}^2.$$

Mais, par hypothèse, SO = TH, et SO′ = TH′ : donc

ABCDE : FGIK :: A′B′C′D′E′ : F′G′I′K′.

663. *On nomme* PARALLÉLIPIPÈDE *un corps terminé par six plans parallèles deux à deux.* Fig. 299.

Il suit de cette définition qu'un parallélipipède est déterminé lorsque l'on connaît trois arètes et l'angle trièdre qu'elles forment: car il suffit alors, pour le construire, de mener par l'extrémité de chaque arète un plan parallèle à celui des deux autres.

THÉORÈME.

664. *Les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes; celles qui sont opposées sont égales; les trièdres opposés sont symétriques; et les diagonales menées par les sommets de ces angles se coupent mutuellement en deux parties égales dans un même point, qui est le* CENTRE *du parallélipipède.*

1.° Chaque face telle que ABCD est un parallélogramme, parce que ses côtés opposés sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième;

2.° Les deux faces opposées ABCD et FGIK ont leurs côtés AB et FG, BC et GI, égaux et parallèles (225) : donc elles ont un angle égal (88) compris entre côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égales (232).

3.° Si l'on prolonge les arètes du trièdre C, on formera un trièdre CB′D′I′ symétrique de CBID (554), mais qui sera égal au trièdre F : car leurs faces sont égales chacune à chacune (516), et semblablement placées : donc le trièdre CBID est le symétrique de F.

4.° Considérons les deux diagonales BK et GD qui joignent les sommets opposés B et K, et G et D. Il est clair qu'en joignant BD et GK, on formera un parallèlogramme BDGK (228), dont ces lignes seront les diagonales : donc elles se coupent mutuellement en parties égales. Il en sera évidemment de même pour l'une quelconque des deux diagonales BK et GD, et chacune des deux autres AI et CF : donc les quatre diagonales qui joignent les sommets opposés, se coupent en deux parties égales.

5.° Je dis enfin que leur point de section O est le centre du parallélipipède. Menons, en effet, par ce point une droite quel-

conque MN, et soient M et N les points où elles percent les deux faces opposées BF et CK. Si nous faisons passer un plan par cette droite et par la diagonale BK, ses traces BM et KN sur ces deux faces seront parallèles (508) : donc les triangles OBM et OKN auront un côté égal BO=OK adjacent à des angles égaux chacun à chacun, savoir, BOM=KON (60) et OBM=OKN (86, 1.°); donc ils seront égaux; donc OM=ON; donc toute ligne qui, passant par le point O, va se terminer à la surface du parallélipipède, est divisée en ce point en deux parties égales; donc ce point est le centre de cette surface (230).

665. Deux faces opposées quelconques d'un parallélipipède se nomment ses *bases*, et la perpendiculaire abaissée d'un point de l'une sur l'autre est sa *hauteur*.

666. Un *parallélipipède* est *droit* lorsque ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases; mais, si en outre ces bases sont des rectangles, on lui donne le nom de *parallélipipède rectangle* : car toutes ses faces sont alors des rectangles.

667. Si les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle sont égales, ses six faces deviennent des *carrés*, et on l'appelle alors un *cube*. Il est clair que le cube est à la fois inscriptible et circonscriptible à la sphère.

668. *Le* PRISME *est un polyèdre dont deux faces sont des*
Fig. 500. *polygones* ABCDE *et* FGHIK, *qui ont leurs côtes égaux et parallèles chacun à chacun, et dont les autres faces* AG, BH... *sont déterminées par les plans conduits suivant les côtés homologues* AB *et* FG, BC *et* GH..... *de ces polygones.* Ces autres faces sont évidemment des parallélogrammes (228); on les nomme les faces *latérales* du prisme, tandis que les deux polygones sont appelés ses *bases*. La *hauteur* de ce polyèdre est la distance de ses deux bases.

669. Un *prisme* est *droit* lorsque ses arêtes latérales AF, BG..... sont perpendiculaires aux plans des bases.

Un *prisme* est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

670. Si la base d'un prisme est un parallélogramme, ses

faces latérales seront parallèles deux à deux (516), de sorte que ce polyèdre sera un parallélipipède (663).

671. Si l'on observe que la surface latérale d'un prisme peut être engendrée en faisant glisser une de ses arètes latérales parallèlement à elle-même sur le contour de sa base, on en conclura qu'un cylindre est un prisme dont la base a une infinité de côtés infiniment petits (601).

672. *Un prisme est* RÉGULIER *lorsqu'il est droit, et que sa base est un polygone régulier.*

Si l'on construit deux cylindres droits qui aient même hauteur qu'un prisme régulier, et pour bases les cercles inscrit et circonscrit à la sienne, ces cylindres seront dits *inscrit* et *circonscrit* au prisme.

THÉORÈME.

673. *Deux prismes* AH *et* A'H' *sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre trois faces égales chacune à chacune et semblablement placées,* savoir : ABCDE = A'B'C'D'E', AK = A'K', et AG = A'G'.

Il suit immédiatement de cette hypothèse que les trièdres A et A' sont égaux (553), et que par conséquent, si l'on superpose les deux bases ABCDE et A'B'C'D'E' en faisant coïncider leurs côtés homologues, les arètes AF et A'F', coïncideront aussi; et, comme elles sont égales, le point F' tombera sur le point F : donc les parallélogrammes AK et A'K', AG et A'G' se recouvriront exactement; donc il en sera de même des bases supérieures, et, par suite, des faces latérales BH et B'H', CI et C'I', etc.; donc les deux prismes sont égaux.

674. COROLLAIRE I. *Deux prismes droits sont égaux lorsqu'ils ont des bases égales et des hauteurs égales :* car toutes leurs faces latérales sont des rectangles égaux chacun à chacun. Si donc les trièdres A et A', par exemple, ont leurs faces semblablement placées, la condition énoncée au n.º 673 sera remplie, et les prismes seront égaux; s'il n'en est pas ainsi, les trièdres A et F' seront égaux, et par conséquent les prismes le seront aussi.

675. COROLLAIRE II. Deux parallélipipèdes sont égaux dans les mêmes circonstances où deux prismes le sont (670).

676. COROLLAIRE III. Un prisme est déterminé quand on con-

naît sa base et l'une de ses arètes latérales en grandeur et en direction.

THÉORÈME.

677. *Un polyèdre quelconque peut toujours être partagé en pyramides, et même en tétraèdres.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que le polyèdre sera convexe ou concave.

1.° Si le polyèdre est convexe, on conduira des plans par un sommet quelconque A, et par chacune des arètes des faces non adjacentes à ce sommet, et il sera ainsi décomposé en autant de pyramides qu'il y a de ces faces.

Si maintenant on partage la base de chaque pyramide en triangles, et que l'on mène des plans par chaque *ligne de division* et par le sommet commun, on décomposera chacune de ces pyramides, et partant le polyèdre proposé, en tétraèdres.

2.° Si notre polyèdre est concave, on le partagera immédiatement en pyramides, et par suite en tétraèdres, si d'un point pris dans son intérieur on peut mener à tous ses sommets des droites qui, pour y arriver, ne traversent aucune de ses faces. S'il n'en est pas ainsi, menez par le sommet de l'un de ses angles rentrans un plan qui passe entre les arètes de cet angle, et le polyèdre se trouvera ainsi partagé en deux polyèdres qui, pris ensemble, auront un angle rentrant de moins que le premier. Si donc vous opérez de la même manière sur chacun de ceux-ci, et ainsi de suite, vous finirez par décomposer le polyèdre proposé en un certain nombre de polyèdres convexes, ce qui vous ramènera au premier cas.

THÉORÈME.

678. *Le nombre* F *des faces d'un polyèdre, augmenté de celui* S *de ses sommets, surpasse de deux unités le nombre* A *de ses arètes*, de sorte que l'on a $F+S-A=2$ (*a*).

En effet, si l'on enlève une des faces de ce polyèdre, il deviendra un polyèdre *ouvert*, dont le nombre des faces sera $(F-1)$, et qui aura le même nombre d'arètes et de sommets que le proposé. Supprimons une face quelconque de ce second polyèdre, et soient F' le nombre de ses faces, S' et A' ceux de

(*a*) C'est là le théorème d'EULER.

ses sommets et de ses arètes. Il est clair que l'on aura effectué cette suppression en ôtant un polygone ouvert, lequel aura nécessairement un sommet de moins qu'il n'a de côtés : donc, si l'on désigne par s le nombre de ces sommets, par F', S' et A' le nombre des faces, des sommets et des arètes du nouveau polyèdre, on aura :

$$F' = F - 2, \qquad S' = S - s, \qquad A' = A - s - 1:$$

donc

$$F' + S' - A' = (F - 1) + S - A.$$

Ainsi, en enlevant une face d'un polyèdre *ouvert* quelconque, l'excès du nombre des faces augmenté de celui des sommets sur le nombre des arètes, demeurera constant. Il en sera donc de même si l'on supprime une seconde face, une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on ait réduit le polyèdre à un simple polygone; mais alors la différence dont il s'agit sera évidemment égale à l'unité, puisqu'un polygone a autant d'arètes que de sommets : donc

$$F - 1 + S - A = 1 : \text{d'où} \quad F + S - A = 2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

679. Scholie. Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre dû à M. *Cauchy*, et que l'on démontrerait de la même manière. (*Annales de mathématiques et Journal de l'école polytechnique.*)

680. Corollaire. *La somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre est égale à autant de fois quatre droits qu'il y a d'unités dans l'excès du nombre des arètes sur celui des faces, ou à autant de fois quatre droits qu'il y a de sommets, moins deux.*

On sait en effet que la somme des angles d'un polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés, moins *quatre* droits : donc la somme V des angles de toutes les faces d'un polyèdre est égale à autant de fois deux droits que ces faces ont de côtés, moins autant de fois quatre droits qu'il y a de faces. Mais, comme chaque arète appartient à deux faces, on voit qu'en comptant le nombre des côtés de toutes les faces du polyèdre, on trouve un nombre double de celui de ses arètes : donc l'expression de V est

$$V = 2 \cdot 2A - 4F = 4(A - F) = 4(S - 2),$$

d'après le théorème d'*Euler*, ce qu'il fallait démontrer.

681. M. *Gergonne* a prouvé, dans les *Annales de mathématiques*, qu'à l'exception de quelques théorèmes, tels que celui d'*Euler*, dans lesquels le nombre des faces et celui des sommets figurent de la même manière, il n'est aucun théorème de ce genre auquel il ne doive en répondre un autre *qui s'en déduit* indispensablement, en y permutant simplement entre *eux les* mots *faces* et *sommets*. Nous allons indiquer brièvement la marche qui conduit à ces théorèmes.

Soient $c, d, e, f, g, h\ldots.$ le nombre des faces qui ont 3, 4, 5, 6, 7, 8.... côtés, et $c', d', e', f', g', h'\ldots.$ le nombre des angles polyèdres qui ont 3, 4, 5, 6, 7, 8.... faces.

Comme chaque arête appartient à deux faces et *aboutit* à deux sommets, on aura :

$$2A=3c+4d+5e+6f+\ldots,\quad 2A=3c'+4d'+5e'+6f'+\ldots$$

Or, si l'on retranche de $2A$, $4d+6f+8h+\ldots$ le reste $3c+5e+7g+\ldots$ sera un nombre pair : donc, si l'on retranche de celui-ci le nombre pair $2c+4e+6g+\ldots$ le second reste $c+e+g+\ldots$ sera aussi pair. Il en est évidemment de même pour la quantité $c'+e'+g'+\ldots$: donc

Les FACES *d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair.*

Les SOMMETS *d'un nombre impair d'arètes sont toujours en nombre pair.*

D'un autre côté

$$F=c+d+e+f+\ldots,\quad S=c'+d'+e'+f'+\ldots$$

donc, en substituant ces valeurs de F, S, A, dans l'équation $F+S=A+2$, après en avoir doublé tous les termes, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} 2\,(c+d+e+f+\ldots\ldots)=4+c'+2d'+3e'+4f'+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\,(c'+d'+e'+f'+\ldots\ldots)=4+c+2d+3e+4f+\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ (1),$$

équations qui se changent l'une dans l'autre par la *simple permutation* des lettres c et c', d et d', etc. : donc elles expriment des théorèmes qui se changent l'un dans l'autre par la seule permutation des mots *face* et *sommet*.

Si l'on ajoute la seconde au double de la première, ce qui revient à éliminer c' entre elles, on trouvera :

$$3c+2d+e=12+(g+2h+3i+\ldots\ldots)+2\,(d'+2e'+3f'+\ldots\ldots)\ldots(2),$$

équation absurde si c, d, e, sont nuls ; donc

Il n'y a aucun polyèdre dont toutes les FACES *aient plus de cinq côtés, ou dont tous les* SOMMETS *aient plus de cinq arètes.*

Si d et e sont nuls, c vaut au moins 4; si c et e sont nuls, d vaut au moins 6; si c et d sont nuls, e vaut au moins 12: donc

Un polyèdre qui n'a ni faces quadrangulaires ni pentagonales, a au moins quatre faces triangulaires.

Un polyèdre qui n'a ni faces triangulaires ni pentagonales, a au moins six faces quadrangulaires.

Un polyèdre qui n'a ni faces triangulaires ni quadrangulaires, a au moins douze faces pentagonales.

Un polyèdre qui n'a ni sommets tétraèdres ni pentaèdres, a au moins quatre sommets trièdres.

Un polyèdre qui n'a ni sommets trièdres ni pentaèdres, a au moins six sommets tétraèdres.

Un polyèdre qui n'a ni sommets trièdres ni tétraèdres, a au moins douze sommets pentaèdres.

Si, d', e', f'... étant nuls, on suppose que $d, e, g, h\ldots$, ou $c, e, g, h\ldots$, ou $c, d, g, h\ldots$ soient nuls en même temps, on aura $c=4$, ou $d=6$, ou $e=12$: donc

Si tous les sommets d'un polyèdre sont trièdres, et qu'il n'ait que des faces triangulaires et hexagonales, ou quadrangulaires et hexagonales, ou pentagonales et hexagonales, il a nécessairement quatre faces triangulaires, ou six quadrangulaires, ou douze pentagonales.

Si toutes les faces d'un polyèdre sont triangulaires, et qu'il n'ait que des sommets trièdres et hexaèdres, ou tétraèdres et hexaèdres, ou pentaèdres et hexaèdres, il a nécessairement quatre sommets trièdres, ou six sommets tétraèdres, ou douze pentaèdres.

Si, $d, e, f, g\ldots$ étant nuls, on suppose que tous les sommets soient trièdres, ou tétraèdres, ou pentaèdres, on a $c=4$, ou $3c=12+2d'$, ou $3c=12+4c'$; mais l'équation (2) donne, en permutant c et c', d et d', etc.:

$3c'+2d'+e'=12+(g'+2h'+3i'+\ldots)+2(d+2e+3f+\ldots)\ldots(3)$;

d'où l'on tire, dans nos deux dernières hypothèses, $d'=6$ et $e'=12$, partant $c=8$ ou $c=20$.

Si, $c, e, f\ldots$ étant nuls, on suppose que tous les sommets soient trièdres, on a $d=6$. On ne saurait supposer que les sommets, ayant tous le même nombre d'arêtes, en eussent chacun plus de trois: car les équations (2) et (3) seraient alors contradictoires.

Si, c, d, f, g... étant nuls, on suppose que tous les sommets soient trièdres, on aura $e=12$. On ne saurait supposer que les sommets, ayant tous le même nombre d'arêtes, en eussent chacun plus de trois : car alors les équations (2) et (3) seraient contradictoires. Ainsi

Il ne peut y avoir que cinq sortes de polyèdres dont toutes les faces aient le même nombre de côtés, et tous les angles le même nombre d'arêtes : ce sont le *tétraèdre*, *l'octaèdre*, l'*icosaèdre*, l'*hexaèdre* et le *dodécaèdre*.

Si l'on ajoute les équations (1), d et d' disparaîtront, et l'on aura :

$$c+c'=8+(e+2f+3g+\ldots)+(e'+2f'+3g'+\ldots)\ldots\ldots(4)$$

Si l'on élimine e entre les équations (1), il viendra :

$$4c+2d+c'=20+2(f+2g+\ldots)+2d'+5e'+\ldots\ldots\ldots(5).$$

On déduira de ces deux dernières équations des théorèmes analogues à ceux que nous avons établis plus haut, et entre autres celui-ci :

Un polyèdre ne saurait être privé à la fois de faces triangulaires et d'angles trièdres, et il faut même que le nombre des uns et des autres ne soit pas moindre que huit.

THÉORÈME.

682. *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées.*

En effet, si l'on place une des faces de l'un des polyèdres sur celle qui lui est égale dans l'autre, on verra facilement que les faces qui lui sont contiguës viendront coïncider avec leurs homologues, et ainsi de suite de proche en proche, de sorte que le premier polyèdre recouvrira exactement le second.

Observons toutefois que l'énoncé de ce théorème renferme évidemment plus de conditions qu'il n'en faut pour que deux polyèdres soient égaux. M. *Cauchy* a démontré en effet que *deux polyèdres convexes sont égaux quand ils ont* toutes leurs *faces égales chacune à chacune, et semblablement placées.* (*Journal de l'Ecole polytechnique.*)

CHAPITRE II.

DES CORPS SEMBLABLES ET SYMÉTRIQUES.

683. *Deux corps sont* SEMBLABLES *lorsqu'on peut les placer de telle sorte qu'en menant par un même point des droites aux différens points des deux surfaces qui les terminent, les rayons vecteurs dont les directions coïncident soient proportionnels.*

Les surfaces qui terminent les deux corps sont aussi dites semblables.

684. Il suit immédiatement de cette définition que *si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, la petite pyramide sera semblable à la grande* (521).

THÉORÈME.

685. *Lorsque deux corps sont semblables, on peut prendre pour centre de similitude de l'un tel point que l'on veut de l'espace, et il y aura toujours pour l'autre un centre correspondant de similitude.*

Même démonstration qu'au n.° 327.

THÉORÈME.

686. *Deux cônes droits, deux troncs de cône droits à bases parallèles, et deux cylindres droits, sont semblables lorsqu'ils sont engendrés par des figures semblables tournant autour de deux côtés homologues.*

Même démonstration qu'aux n.os 330 et 338.

THÉORÈME.

687. *Deux calottes, deux segmens et deux secteurs sphériques sont semblables lorsqu'ils correspondent à des surfaces coniques égales.*

Deux zones sont semblables quand elles sont des différences de calottes semblables.

Deux tranches sphériques qui correspondent à des zones semblables, sont semblables.

Même démonstration qu'aux n.os 330 et 338.

688. Corollaire. *Deux sphères sont toujours semblables.* Elles ont deux centres de similitude, dont chacun est le centre d'une surface conique tangente aux deux sphères (531).

THÉORÈME.

689. *Deux triangles sphériques sont semblables quand ils correspondent à des trièdres égaux.*

Deux fuseaux et deux coins qui correspondent à des dièdres égaux sont semblables.

Ceci est une conséquence immédiate de la définition des corps et des surfaces semblables.

THÉORÈME.

690. *Si deux corps sont semblables, et que l'un soit un polyèdre, l'autre en sera aussi un; ils auront chacun le même nombre de faces; ces faces seront semblables et semblablement placées* (*a*), *et leurs angles dièdres et polyèdres seront égaux chacun à chacun.*

Puisque ces deux corps sont semblables, on pourra les placer Fig. 301. de manière qu'ils aient un même centre de similitude O. Par ce point et chaque arète du polyèdre menons des plans, et nous formerons une série de pyramides ayant O pour sommet commun, et pour bases les différentes faces du polyèdre. Soient OABCDE une quelconque de ces pyramides, et A', B', C', D', E', les points où ses arètes percent la surface du second corps. Ces points, divisant ces arètes en parties proportionnelles (683), sont dans un même plan parallèle à la base ABCDE, lequel divise dans le même rapport toutes les droites qui, issues de O, vont

(*a*) C'est-à-dire, 1.° que les deux angles dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble les deux faces du premier polyèdre auxquelles ils appartiennent, sont homologues de ceux dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble les deux faces semblables du second; 2.° que si l'on place l'une de ces deux faces sur sa correspondante de manière que deux côtés homologues coïncident, les deux autres faces seront d'un même côté du plan commun.

se terminer à cette base. Mais la surface du second corps jouit de la même propriété : donc la portion de cette surface qui est comprise dans la pyramide, coïncide avec le polygone A'B'C'D'E', et est par conséquent semblable à ABCDE : donc à chaque face du polyèdre correspond une face semblable du second corps, qui est ainsi un polyèdre. En second lieu tous les dièdres homologues sont égaux comme ayant leurs faces parallèles et dirigées dans le même sens ; enfin tous les angles polyèdres seront égaux chacun à chacun, puisque, les angles plans qui les forment étant des angles homologues de polygones semblables, ils ont ainsi leurs faces homologues égales semblablement placées et également inclinées.

691. Scholie. Remarquons que l'on aurait pu prendre pour centre de similitude l'un quelconque des sommets du polyèdre, et qu'alors le centre de similitude du second eût été le sommet homologue de ce second polyèdre.

692. D'où il suit que *dans deux polyèdres semblables les arètes et les diagonales homologues sont proportionnelles.*

THÉORÈME.

693. Réciproquement, *deux polyèdres* P *et* p *sont semblables lorsqu'ils ont leurs faces semblables chacune à chacune semblablement placées et également inclinées.*

Par un point quelconque O, et chacune des arètes du polyèdre P, faisons passer des plans, et nous formerons une série de pyramides ayant O pour sommet commun, et pour bases les différentes faces de ce polyèdre. Soit OABCDE une de ces pyramides. Prenons sur l'une de ses arètes OA une quatrième proportionnelle OA' à deux arètes homologues quelconques AB, *ab*, des deux polyèdres, et à OA ; et menons par A' un plan parallèle à ABCDE, ce qui déterminera dans la pyramide OABCDE une section A'B'C'D'E' semblable à ABCDE, et par conséquent égale à *abcde*. En effet on a, comme on sait (286),

$$AB : A'B' :: OA : OA'.$$

Mais, par construction,

$$AB : ab :: OA : OA' :$$

donc

$$A'B' = ab.$$

Et ainsi les deux polygones semblables A'B'C'D'E' et *abcde*

sont égaux. Par les côtés A'B', B'C', C'D'... menons des plans parallèles à ceux des faces adjacentes aux côtés homologues AB, BC, CD... et ainsi de suite pour les côtés des nouveaux polygones ainsi obtenus. Le polyèdre P' ainsi formé aura ses faces égales chacune à chacune à celles de p; d'ailleurs elles seront semblablement placées et également inclinées : donc le polyèdre P' est égal à p (682). Mais P' est semblable à P (683) : donc p est aussi semblable à P.

694. Corollaire. 1.° *Tous les cubes sont semblables;* 2.° *deux parallélipipèdes rectangles qui ont leurs arètes proportionnelles;* 3.° *deux parallélipipèdes obliques qui ont un angle trièdre égal compris entre des arètes proportionnelles;* 4.° *deux prismes qui ont un angle trièdre compris entre les plans de trois polygones semblables chacun à chacun et semblablement placés, sont semblables :* car toutes les faces latérales sont semblables chacune à chacune (337); et, comme elles sont d'ailleurs semblablement placées, leurs trièdres, et par conséquent leurs dièdres homologues, sont égaux.

On pourrait faire voir, par un raisonnement analogue à celui du n.° 338, que la similitude de ces polyèdres est une conséquence immédiate de la définition des corps semblables (683).

695. Remarquons que le théorème précédent renferme plus de conditions qu'il n'en faut pour établir la similitude de deux polyèdres (682).

THÉORÈME.

696. *Deux polyèdres semblables quelconques peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, et semblablement placées* (a).

(a) C'est-à-dire, 1.° que les deux dièdres dont l'arète commune est une des arètes mêmes de la face qui assemble les deux pyramides du premier polyèdre auxquelles ils appartiennent, sont homologues de ceux dont l'arète commune est une des arètes mêmes de la face qui réunit les deux pyramides du second polyèdre; 2.° que si l'on place l'une des faces de jonction sur sa correspondante en faisant coïncider deux côtés homologues, les pyramydes semblables seront alors situées d'un même côté du plan commun. Soit, par exemple, le
Fig. 502. polyèdre SABCDEFG composé des pyramides SABCDE, SABFG et SAEF, et supposons que la base de la première soit posée sur le plan même de la figure, et que tous les autres sommets S, F, G, soient au dessus de ce plan. Si l'on veut construire un polyèdre composé de pyramides semblables à celles-ci, et qui soient semblablement placées, on formera d'abord une pyramide

La démonstration du n.º 693 a prouvé que les pyramides qui, comme OABCDE, ont pour sommet le point O, et pour bases les différentes faces du polyèdre P, sont semblables aux pyramides correspondantes du polyèdre P', et par conséquent à celles du polyèdre égal p: donc, si l'un des polyèdres est susceptible d'être partagé en pyramides par des plans menés par un même point, ce qui arrivera toujours s'il est convexe (677), tout polyèdre qui lui sera semblable jouira de la même propriété, et les pyramides dans lesquelles on les aura décomposés seront semblables chacune à chacune, et semblablement placées.

Si les pyramides dans lesquelles on a décomposé l'un des polyèdres n'ont pas toutes leurs sommets réunis au même point, il n'y aura qu'à prendre successivement chacun des sommets communs à une même suite de pyramides pour centre de similitude, et l'on conclura encore que les deux polyèdres sont décomposables en pyramides semblables, et semblablement placées.

697. Scholie. Si l'on observe que deux pyramides quelconques peuvent être partagées en tétraèdres semblables et semblablement placées, on pourra donner du théorème précédent l'énoncé suivant :

Deux polyèdres semblables quelconques peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, et semblablement placés.

THÉORÈME.

698. Réciproquement, *deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune et semblablement placées, sont semblables.*

Il pourra se présenter deux cas, selon que les pyramides auront ou n'auront pas tous leurs sommets réunis au même point.

Premier cas. Supposons que les pyramides OABCDE et Fig. 501.

$sabcde$ semblable à la première; puis, comme les deux dièdres ASBC et ASBG ont BS pour arète commune, on construira sur asb une pyramide semblable à SABGF, en ayant soin que le dièdre homologue à ASBG ait bs pour arète, et que la face bgs soit du côté opposé au plan bsc. La troisième pyramide $saef$ se trouvera déterminée par suite de cette construction.

oabcde, OABFG et *oabfg*, etc., soient semblables et semblablement placées. Il résulte immédiatement de la première condition, que leurs angles polyèdres en O et en *o* sont égaux chacun à chacun, de sorte que l'on pourra placer le second polyèdre dans le premier de telle manière que les arètes de l'angle *oabcde* tombent sur leurs homologues. Mais, comme en outre les pyramides des deux polyèdres sont semblablement placées, les arètes *of*, *og*.... prendront de même les directions OF, OG.... : ainsi les faces *abcde*, *abfg*.... du second polyèdre seront venues se placer en A'B'C'D'E', A'B'F'G'... *parallèlement* aux faces homologues ABCDE, ABFG.... du premier, puisque les points A', B', C'.... divisent les droites OA, OB, OC.... en parties proportionnelles. Donc tous les rayons vecteurs menés de O à la surface du premier polyèdre seront coupés par celle du second en parties proportionnelles; donc les deux polyèdres sont semblables.

Second cas. La démonstration est identiquement la même que celle relative à deux polygones (340, *second cas*).

699. Corollaire. *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de pyramides égales chacune à chacune et semblablement placées.*

700. Les conditions de similitude de deux polyèdres renferment implicitement celles qui établissent que deux tétraèdres sont semblables, mais on conçoit cependant que quelques-unes de ces conditions peuvent être une conséquence nécessaire des autres. C'est ainsi, par exemple, que deux prismes sont semblables par cela seul qu'ils ont un trièdre compris entre trois polygones semblables chacun à chacun et semblablement placés (694). On a effectivement reconnu que deux tétraèdres sont semblables dans quatre cas que nous allons examiner successivement.

THÉORÈME.

701. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont leurs arètes proportionnelles, et que les faces formées par les arètes homologues sont semblablement placées.*

Fig. 505. Je prends, sur les arètes SA, SB, SC, des parties SD, SE, SF, respectivement égales à S'A', S'B', S'C', et par les trois points D, E, F, je mène un plan. Ce plan sera parallèle à ABC, puisqu'il divise les arètes du trièdre S en parties proportionnelles.

donc le tétraèdre SDEF est semblable à SABC (684). Or il est égal à S'A'B'C' : car, les faces des deux tétraèdres proposés étant semblables chacune à chacune (351), les faces du trièdre S sont respectivement égales à celles du trièdre S'; et, comme nous avons supposé qu'elles étaient semblablement placées, ces deux trièdres sont égaux; de sorte que les tétraèdres S'A'B'C' et SDEF sont superposables. Donc S'A'B'C' est semblable à SABC.

702. Corollaire. Si l'on forme un tétraèdre avec quatre sommets d'un polyèdre, et qu'on en forme un second avec les quatre sommets homologues d'un polyèdre semblable, ces deux tétraèdres seront semblables (692).

THÉORÈME.

703. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont leurs dièdres égaux chacun à chacun, et que leurs faces homologues sont semblablement placées.*

Il suit en effet de l'énoncé, que nos deux tétraèdres ont leurs trièdres égaux chacun à chacun (556); de sorte que leurs faces homologues sont équiangles, et que par conséquent leurs arètes homologues sont proportionnelles; ainsi nous nous trouvons ramenés au cas précédent.

704. Scholie. Remarquons que l'énoncé de ce théorème renferme une condition de trop : car, pour établir la similitude des faces des deux tétraèdres, il suffit de supposer *cinq* dièdres égaux chacun à chacun.

THÉORÈME.

705. *Deux tétraèdres* SABC *et* S'A'B'C' *sont semblables lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces* SAB *et* S'A'B', SAC *et* S'A'C' *semblables chacune à chacune et semblablement placées.*

Je prends, à partir du point S, SD = S'A', SE = S'B', et SF = S'C'; et, par les trois points D, E, F, je mène un plan. Ce plan coupera donc les arètes du trièdre S en parties proportionnelles, puisque ces arètes sont proportionnelles à celles du trièdre S', à cause de la similitude des triangles SAB et S'A'B', SAC et S'A'C' : donc il est parallèle à ABC; donc le tétraèdre SDEF est semblable à SABC. Mais les tétraèdres SDEF

et S'A'B'C' sont superposables, car les trièdres S et S' sont égaux (557) : donc ce dernier est aussi semblable à SABC.

THÉORÈME.

706. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun, et dont les faces homologues sont semblablement placées.*

Soit la face SAC semblable à S'A'C'. Prenons encore SD=S'A', SE=S'B', SF=S'C', et menons un plan par les trois points D, E, F. Le trièdre S est égal au trièdre S' (558) : donc les deux tétraèdres SDEF et S'A'B'C' sont superposables. Mais la similitude des triangles SDF et SAC exige que DF soit parallèle à *AC*; et, comme d'ailleurs le dièdre SDFE est égal, pas hypothèse, à SACB, on voit que le plan DEF est parallèle à ABC : donc le tétraèdre SDEF, c'est-à-dire S'A'B'C', est semblable à SABC.

DES CORPS SYMÉTRIQUES.

707. *Deux corps sont* SYMÉTRIQUES *lorsqu'on peut les placer de telle sorte que toutes les droites menées par un certain point de l'espace percent les surfaces qui les terminent en des points deux à deux équidistans du point dont il s'agit. Ce point se nomme le* CENTRE DE SYMÉTRIE *des deux corps, qui alors sont dits symétriques par rapport à ce point.*

Les surfaces qui terminent deux corps symétriques sont elles-mêmes symétriques.

708. Il suit immédiatement de cette définition que, *si l'on coupe deux angles polyèdres opposés par le sommet par deux plans parallèles et équidistans de ce sommet, les deux pyramides ainsi formées seront symétriques.*

THÉORÈME.

709. *Lorsque deux corps sont symétriques, on peut toujours les placer de telle sorte que tel point qu'on voudra de l'espace soit leur centre de symétrie.*

En effet, puisque les deux corps sont symétriques, on peut tou-
Fig. 504. jours les placer de manière qu'en menant d'un certain point O

des rayons vecteurs aux différens points A, B, C.... de la surface du premier, ces rayons, prolongés de quantités égales à eux-mêmes, aillent aboutir, en A', B', C'.... à la surface du second. Le point O est leur centre de symétrie. Cela posé, prenons un point arbitraire F, et joignons FO, FA, FB, FC..... Menons A'I parallèle à AF, jusqu'à la rencontre de OF, et tirons B'I. On aura OI=OF, à cause de l'égalité des triangles AOF et A'OI (201) : donc les triangles OFB et OIB' sont égaux (199); donc B'I est égale et parallèle à BF; donc, si par les points A', B', C'...., on mène des parallèles A'A", B'B", C'C"..... à FI jusqu'à la rencontre des lignes respectives AF, BF, CF.... ces parallèles seront égales à FI, et la surface qui sera le lieu de tous les points A", B", C".... ne sera autre chose que la surface A'B'C'..... transportée parallèlement à elle-même. Mais FA", FB", FC".... sont égales à IA', IB', IC'.... et partant à FA, FB, FC.... donc le point F est un centre de symétrie des deux surfaces ABC... et A"B", C"....

THÉORÈME.

710. *Deux corps symétriques peuvent être placés symétriquement par rapport à un plan donné quelconque,* c'est-à-dire de telle sorte que les points homologues de leurs surfaces seront situés à égales distances du plan dont il s'agit, sur une même perpendiculaire à ce plan.

Plaçons les deux corps symétriquement par rapport à un point quelconque O du plan donné MN, et menons par ce point une perpendiculaire OZ à ce plan. Maintenant faisons faire une demi-révolution au corps A'B'C'... autour de OZ. Il est clair que la projection a' de A' sur MN viendra coïncider avec la projection a du point symétrique A de l'autre surface : car Oa'=Oa à cause de l'égalité des triangles OAa et OA'a'. Il en sera de même des projections de tous les autres points des deux surfaces. Ainsi les deux corps seront actuellement disposés de telle sorte que tous les points de leurs surfaces seront situés deux à deux sur une perpendiculaire au plan MN, et à égale distance de ce plan. Donc ces deux corps sont symétriques par rapport à ce plan. Fig. 505.

Le plan MN est donc un *plan de symétrie* des deux corps ABC.... et A"B"C"......

THÉORÈME.

711. Réciproquement, *si deux corps* ABC.... et A″B″C″.... *sont symétriques par rapport à un plan* MN, *ils pourront être placés symétriquement par rapport à un point quelconque* O *de ce plan, et, par suite, par rapport à tout point de l'espace* (709).

Faisons faire une demi-révolution au corps A″B″C″... autour de OZ. De cette manière la projection a du point A″ sur le plan MN viendra se placer en a' sur le prolongement de Oa, et le point A″ se trouvera ainsi transporté en A′. Si alors on joint OA′ et OA, on formera deux triangles égaux OAa, et OA′a' (199): car les angles a et a' sont droits, Oa = Oa', et a'A′ = aA″ est ainsi égal à Aa. Donc l'angle AOa = A′Oa', et AOA′ est par conséquent une ligne droite : donc toute droite menée par le point O ira percer les surfaces des deux corps dans leur nouvelle position, en des points deux à deux équidistans de O; donc ce point est un centre de symétrie des deux corps.

712. Il résulte de la définition des corps symétriques et du théorème du n.° 709, qu'il existe une grande analogie entre ces corps et les corps semblables. Le rapport de similitude est alors l'unité; mais les rayons vecteurs homologues, au lieu d'être dirigés dans le même sens, le sont ici en sens contraires. On conçoit, d'après cela, que si l'on introduit ces deux modifications dans les énoncés et dans les démonstrations des théorèmes que nous avons établis sur les corps semblables, on aura les énoncés et les démonstrations des propositions correspondantes des corps symétriques. Cependant le théorème du n.° 710 permettra de simplifier quelques-unes de ces démonstrations.

THÉORÈME.

713. *Si deux corps sont symétriques, et que l'un soit un polyèdre, l'autre en sera aussi un : ils auront chacun le même nombre de faces; ces faces seront égales chacune à chacune, et inversement placées; leurs angles dièdres seront égaux chacun à chacun, et leurs angles polyèdres seront symétriques* (690).

Corollaire. *Dans deux polyèdres symétriques les arètes et les diagonales homologues sont égales* (692).

THÉORÈME.

714. Réciproquement, *deux polyèdres sont symétriques lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune inversement placées et également inclinées* (693).

Corollaire. Deux triangles sphériques équilatéraux entr'eux, sont symétriques lorsque leurs côtés homologues sont inversement placés.

THÉORÈME.

715. *Deux polyèdres symétriques peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides symétriques chacune à chacune, et inversement placées* (696).

On peut dire encore : Si l'on dispose les deux polyèdres symétriquement par rapport à un même plan, il est évident que les pyramides dans lesquelles on aura décomposé l'un d'eux seront symétriques de celles qui auraient pour sommets les sommets homologues du second.

THÉORÈME.

716. Réciproquement, *deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides symétriques chacune à chacune et inversement placées, sont symétriques* (698).

On peut dire encore : Si par rapport à un plan arbitraire on construit le polyèdre symétrique du premier des polyèdres donnés, ce polyèdre auxiliaire sera égal au second : car ils seront composés d'un même nombre de pyramides égales chacune à chacune et semblablement placées (699) : donc ce second polyèdre est aussi symétrique du premier : car il résulte de la définition du n.° 707 qu'un corps donné ne peut avoir qu'un seul corps symétrique.

CHAPITRE III.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

717. *On appelle* POLYÈDRE RÉGULIER *celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux.* Tel est le *cube* (667) :

car toutes ses faces sont des carrés égaux, et tous ses angles trièdres sont trirectangles, et par conséquent égaux.

THÉORÈME.

718. *Tout polyèdre régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible à une sphère.*

Fig. 506. Soient BAC, CAD, deux faces adjacentes, F et G les centres des cercles inscrits et circonscrits à ces faces. Si l'on élève en ces points des perpendiculaires à leurs plans, elles iront concourir au centre O de la sphère qui passerait par les quatre sommets C, B, A, D (621). Si en outre on abaisse les apothêmes FM et GM sur AC, ils seront égaux, et iront passer par le milieu de cette arète: donc, si l'on joint OM, les triangles rectangles *OMF* et OMG seront égaux (216); donc OF=OG, et l'angle OMF=OMG; de sorte que la droite OM partage en deux parties égales le rectiligne FMG correspondant au dièdre AC. Je dis maintenant que les perpendiculaires élevées au centre de chacune des autres faces du polyèdre iront concourir au point O; et, pour le démontrer, il suffira de prouver qu'il en sera ainsi pour une troisième face EDK adjacente à l'une des deux premières. Soit donc O' le point où la perpendiculaire élevée au plan de cette face par son centre I coupe OG: on verra, comme tout à l'heure, que la droite O'N divise le rectiligne GNI, correspondant au dièdre DK en deux parties égales. Donc, puisque le polyèdre est régulier, l'angle O'NG sera égal à OMG; donc les triangles OGM et O'GN sont égaux (201); donc O'G=OG, et ainsi O' coïncide avec O. Donc toutes les faces sont équidistantes du point O, et par conséquent le polyèdre sera circonscrit à la sphère dont le rayon est OF. Mais ce même point O est aussi équidistant des sommets de chaque face (491): donc la sphère décrite avec le rayon OA sera circonscrite au polyèdre.

719. Corollaire I. *Tout polyèdre régulier peut être partagé en autant de pyramides régulières* (659) *égales qu'il a de faces.* Il suffit, pour effectuer cette décomposition, de mener des plans par le centre O et par chacune de ses arètes.

720. Corollaire II. Réciproquement, *un polyèdre est régulier lorsqu'on peut le décomposer en pyramides régulières égales en menant des plans par chacune de ses arètes, et par un point pris dans son intérieur.* D'abord toutes ses faces sont des

polygones réguliers égaux; ensuite tous ses dièdres sont égaux: car l'angle FMO, qui est la moitié du rectiligne FMG correspondant au dièdre AC, appartient à un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit FM et FO sont constans, puisque l'un est l'apothême de la base de l'une des pyramides, et que l'autre est la hauteur de cette pyramide.

THÉORÈME.

721. *Il ne peut y avoir que cinq sortes de polyèdres réguliers.*

Nous avons vu que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe était toujours moindre que quatre droits. Par conséquent, si toutes ces faces sont égales, leur nombre sera nécessairement moindre que le quotient que l'on obtient en divisant quatre droits par la valeur d'une face. D'où il suit, en observant d'ailleurs que les angles d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un pentagone et d'un hexagone régulier, valent respectivement

$$\tfrac{2}{3},\ 1,\ \tfrac{6}{5} \text{ et } \tfrac{4}{3},$$

1.º Que, si les faces du polyèdre sont des triangles équilatéraux, le nombre des triangles réunis autour d'un même sommet sera plus petit que $\frac{4}{\frac{2}{3}}=6$: donc chaque angle polyèdre ne pourra être formé qu'avec *trois*, *quatre* ou *cinq* angles de triangles équilatéraux;

2.º Que, si les faces sont des carrés, on ne pourra en assembler que *trois* pour former chaque angle polyèdre;

3.º Que, si les faces sont des pentagones, le nombre de ces polygones réunis autour d'un même sommet sera moindre que $\frac{4}{\frac{6}{5}}=\frac{10}{3}<4$: donc on ne pourra former chaque angle polyèdre qu'avec *trois* angles de pentagone;

4.º Que les faces d'un polyèdre régulier ne peuvent avoir plus de *cinq* côtés: car, si l'on voulait employer même des hexagones, on trouverait que le nombre des faces de chacun de ses angles devrait être moindre que $\frac{4}{\frac{4}{3}}=3$, ce qui est absurde.

Donc *il ne peut y avoir que* CINQ *sortes de polyèdres réguliers :* TROIS *formés en réunissant autour d'un même sommet* TROIS, QUATRE *ou* CINQ TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX; *et* DEUX *dont les angles polyèdres résulteraient de l'assemblage de* TROIS CARRÉS *ou de* TROIS PENTAGONES.

Combien chacun d'eux a-t-il de faces?

Soient f le nombre des côtés de chacune et s le nombre des arètes de chaque angle polyèdre. Le nombre total des arètes de toutes les faces sera donc Ff, en conservant la notation du n.° 678; mais, comme chacune appartient à deux faces, il s'ensuit que le nombre des arètes du polyèdre n'est que la moitié de Ff, et qu'ainsi $Ff=2A$; on verra de même que $Ss=2A$, et qu'ainsi nous avons, pour déterminer A, F et S, les trois équations

$$Ff=2A,\quad Ss=2A,\quad F+S-A=2,$$

desquelles on tire facilement

$$F=\frac{4s}{2(f+s)-fs}.$$

Or, dans les cinq polyèdres réguliers dont nous avons reconnu la possibilité, on a successivement :

$$f=3,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 5;$$
$$s=3,\quad 4,\quad 5,\quad 3,\quad 3;$$

et alors la formule précédente donne respectivement :

$$F=4,\quad 8,\quad 20,\quad 6,\quad 12\ (a).$$

Les cinq polyèdres réguliers dont nous avons maintenant à démontrer l'existence, sont donc le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, l'*icosaèdre*, l'*hexaèdre* et le *dodécaèdre*. Nous y parviendrons en résolvant le problème suivant :

PROBLÈME.

722. *Construire un polyèdre régulier d'espèce déterminée, connaissant son arète.*

Or, s'il y a des polyèdres réguliers, ils peuvent être décomposés en autant de pyramides régulières égales qu'ils ont de faces, et réciproquement (719 et 720); et, comme le côté de la base de chacune est donné par l'énoncé du problème, ces pyramides intégrantes seraient déterminées si l'on connaissait les

---

(*a*) Les élèves qui ignorent l'algèbre pourront calculer ces valeurs de F de la manière suivante :

Soient, par exemple, $f=3$ et $s=5$: l'équation $Ff=2A$ donne $3F=2A$; d'où $A=\frac{3F}{2}$. L'équation $Ss=2A$ donne ensuite : $S=\frac{2A}{5}=\frac{3F}{5}$; par conséquent $F+S=F+\frac{3F}{5}=\frac{8F}{5}$; puis $F+S-A=\frac{8F}{5}-\frac{3F}{2}=\frac{F}{10}$. Ainsi le *dixième* de F est 2 : donc $F=20$.

èdres que forment leurs faces (*a*). Soit donc x la valeur de ın de ces dièdres; on aura alors pour expression de l'angle ı sommet de l'une des pyramides (562), $fx-2(f-2)$; et ır conséquent la somme de tous leurs angles au sommet sera $fx-2(f-2)\}F$. Mais elle vaut huit unités : donc

$$\{fx-2(f-2)\}F=8, \text{ d'où } x=\frac{8+2(f-2)}{Ff}.$$

Remplaçant F et f par leurs valeurs respectives, on trouvera ıe l'inclinaison de deux faces adjacentes de l'une des pyramides ıtégrantes du tétraèdre est $\frac{4}{3}$,
de l'octaèdre est 1,
de l'icosaèdre est $\frac{4}{5}$,
de l'hexaèdre est $\frac{4}{3}$,
du dodécaèdre est $\frac{4}{3}$.

En conséquence, si l'on veut construire le dodécaèdre, par xemple, on construira une pyramide pentagonale régulière lont le côté soit égal à l'arète donnée, et telle que l'inclinaison le deux faces adjacentes soit les $\frac{4}{5}$ d'un angle droit; puis, réunissant *douze* de ces pyramides, l'espace se trouvera rempli autour le leur sommet commun, et le problème sera résolu (720). Les ıuatre autres polyèdres réguliers pourront être construits de la nême manière. Observons toutefois que, pour obtenir l'hexaèdre égulier, il sera plus simple de construire un parallélipipède ectangle dont les trois arètes contiguës soient égales à la ligne lonnée (*b*).

(*a*) En effet chaque trièdre à la base est isoèdre, et l'on connait dans ce rièdre le dièdre formé par les deux faces égales et la face qui lui est opposée. 'our obtenir ces faces, il n'y aura donc qu'à renverser la construction par laıuelle nous avons déterminé dans le problème du n.° 564 l'angle opposé à la ace de développement.

(*b*) Si l'on suppose nul le dénominateur de la valeur de F, on aura l'équaion $2(f+s)=fs$, à laquelle on ne peut satisfaire que par les trois couples

$$f=3,\ f=4,\ f=6;$$
$$s=6,\ s=4,\ s=3.$$

Ainsi *une sphère peut, sous trois points de vue différens, être regardée omme un polyèdre régulier d'un nombre infini de faces infiniment petites, ormé en réunissant autour d'un même point*, 1.° *des triangles* SIX *à* SIX; 2.° *des carrés* QUATRE *à* QUATRE; 3.° *des hexagones* TROIS *à* TROIS : ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu au n.° 565.

CHAPITRE IV.

DES AIRES DES CORPS.

LEMME I.

723. *Toute surface plane est moindre que toute autre surface terminée au même contour.*

Il est évident que la grandeur d'une surface dépend à la fois de sa longueur et de sa largeur; de sorte que, si les dimensions d'une surface sont en tous sens plus petites que celles d'une autre, la première surface sera plus petite que la seconde. La même chose aura encore lieu si, les deux surfaces ayant la même dimension dans un certain sens, la première a dans tous les autres des dimensions plus petites que la seconde.

Cela posé, il suit immédiatement de la définition de la ligne droite, que si l'on coupe par un plan quelconque un plan et une surface courbe terminée au même contour, la section du plan sera plus petite que celle de cette surface, ce qui démontre le principe énoncé (*a*).

LEMME II.

724. *Toute surface* CONVEXE *est moindre qu'une autre surface quelconque qui l'envelopperait en s'appuyant sur le même contour.*

LEMME III.

Toute surface CONVEXE *est moindre qu'une autre surface quelconque qui l'enveloppe entièrement.*

Ces deux lemmes se démontrent absolument, comme celui du n.o 396, en s'appuyant sur le précédent, et en remplaçant la droite FG par un plan compris entre les deux surfaces, ou du moins tangent à celle qui est convexe.

725. La détermination de la mesure de l'aire d'un polyèdre quelconque ne saurait présenter de difficulté, puisqu'elle est évidemment la somme de celles des faces de ce polyèdre, et nous avons vu comment on peut les évaluer. J'observerai seulement

---

(*a*) Cette proposition peut très-bien être regardée comme un axiome résultant de la nature même du plan.

que les aires des surfaces latérales de la pyramide régulière et du prisme peuvent s'obtenir par une seule multiplication.

THÉORÈME.

726. *L'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothême.*

En effet chaque face de cette pyramide est un triangle qui a pour mesure un des côtés de la base de cette pyramide multiplié par la moitié de son apothême (660) : donc on pourra, dans l'addition des aires de toutes ces faces, mettre la moitié de l'apothême en facteur commun, et l'on obtiendra ainsi pour mesure de la surface latérale de la pyramide le périmètre de sa base multipliée par la moitié de son apothême.

727. COROLLAIRE. *L'aire de la surface courbe d'un cône droit est égale au produit de la circonférence de sa base multipliée par la moitié de sa génératrice* (658).

Cette proposition résulte également de ce que le développement de la surface latérale d'un cône droit est un secteur qui a pour rayon la génératrice de cette surface, et pour base un arc égal en longueur à la base du cône [590 et 434] (*a*).

(*a*) On peut, au reste, démontrer cette proposition de la manière suivante:

Si le produit *circ* $OA \cdot \frac{1}{2} SA$ n'est pas la mesure de l'aire de la surface courbe du cône SOA, il sera la mesure de celle d'un cône de même hauteur, mais d'un rayon plus grand ou plus petit que OA : car on conçoit que si ce rayon croît d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, l'aire de la surface du cône SOA passera par tous les états de grandeur, et qu'ainsi il y aura un instant où elle aura pour mesure le produit *circ* $OA \cdot \frac{1}{2} SA$. Soit donc $OA' < OA$ la valeur correspondante de ce rayon, de sorte que Fig. 307.

$$aire\ SOA' = circ\ OA \cdot \tfrac{1}{2} SA \ldots\ldots\ldots (1).$$

J'inscris dans le plus grand des deux cônes une pyramide régulière SBCDEFG dont les faces ne rencontrent pas le plus petit, et je représente par A l'aire de la surface latérale de cette pyramide, et par P le périmètre de sa base. Nous aurons donc (726):

$$A = P \cdot \tfrac{1}{2} SI \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Or on voit, en comparant les deux produits *circ* $OA \cdot \frac{1}{2} SA$ et $P \cdot \frac{1}{2} SI$, que le facteur *circ* $OA > P$, et que le facteur $\frac{1}{2} SA$ est aussi plus grand que $\frac{1}{2} SI$; qu'ainsi le premier produit est plus grand que le second. Il faut donc que l'aire de la surface courbe du cône SOA' surpasse celle de la pyramide SBCDEFG ; ce qui est absurde : car, si l'on prolonge l'axe SO d'une quantité $S'O = SO$, et que l'on prenne le point S' pour sommet d'un cône et d'une pyramide qui

728. Scholie. Si le cône était oblique, on commencerait par le développer d'après la méthode du numéro 591, et l'on calculerait ensuite l'aire de ce développement.

THÉORÈME.

729. *L'aire de la surface courbe d'un tronc de cône*
Fig. 287. *droit* ABA'B' *à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de ses bases par sa génératrice, ou le produit de cette génératrice par la circonférence de la section faite à égale distance de ses bases.*

Coupons, en effet, le cône par un plan SAB conduit suivant son axe; par le point B menons dans ce plan sur la génératrice *SB* la perpendiculaire BC égale à la circonférence *OB rectifiée*; joignons SC, et tirons la parallèle B'C' à BC. Je dis d'abord qu'elle sera égale à la circonférence O'B'. En effet les deux circonférences OB et O'B' sont proportionnelles à leurs rayons OB et O'B' et par conséquent aux droites SB et SB'; mais ces dernières sont dans le même rapport que BC et B'C': donc

$$circ\,OB : circ\,O'B' :: BC : B'C'.$$

Mais les antécédens de cette proportion sont égaux : donc les conséquens le sont aussi; donc B'C'$=$*circ* O'B'. Par conséquent le triangle SB'C' est équivalent à la surface courbe *du cône* SO'A'B' (419 et 727); et, comme le triangle SBC est aussi équivalent à la surface latérale du cône SOAB, on en conclut que l'aire de la surface courbe du tronc de cône ABA'B' est égale à celle du trapèze BC' : donc l'aire de ce tronc a pour mesure $\frac{1}{2}(BC+B'C')\cdot BB'$, ou, ce qui revient au même,

$$\tfrac{1}{2}(circ\,OB + circ\,O'B')\cdot BB',$$

conformément à l'énoncé.

---

aient respectivement pour bases le cercle OA' et le polygone BCDEFG, il est clair que la double surface pyramidale enveloppera de toutes parts la double surface conique, et sera ainsi plus grande qu'elle. Donc la surface SBCDEFG est plus grande que la surface conique SOA' (724). Or cette absurdité est une conséquence des égalités (1) et (2). La vérité de la seconde a été démontrée; donc la première est fausse; donc il n'est pas possible que le produit $circ\,OA \cdot \frac{1}{2}SA$ soit la mesure de l'aire d'un cône de même hauteur que le cône SOA, mais d'un rayon plus petit que OA. On prouverait de même que ce produit ne peut mesurer l'aire d'un cône de même hauteur que SOA, mais d'un rayon plus grand que OA : donc il est la mesure du cône SOA.

Si par le milieu de BB' on mène un plan A"B" parallèle aux bases du tronc de cône, et une parallèle B"C" à celles du trapèze, on verra facilement que B"C"=*circ* O"B"; et, comme le trapèze BC' a pour mesure B"C'·BB', on en conclut encore que l'aire de la surface convexe du tronc de cône est égale à *circ* O"B"·BB', ce qui s'accorde avec l'énoncé.

THÉORÈME.

730. *L'aire de la surface latérale d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de l'une de ses arètes multipliée par le périmètre de la* SECTION DROITE, c'est-à-dire de la section faite dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arètes.

En effet chaque côté de la section droite peut être regardé comme la hauteur de la face correspondante du prisme, en prenant pour bases de cette face les deux arètes qui la limitent latéralement: donc, etc.

731. COROLLAIRE. *L'aire de la surface courbe d'un cylindre circulaire quelconque a pour mesure* (671) *la circonférence de la section droite multipliée par sa génératrice* (*a*).

THÉORÈME.

732. *L'aire de la surface courbe d'un tronc de cylindre circulaire droit a pour mesure la ciconférence de sa base multipliée par son axe.*

Car, si l'on prolonge l'axe du tronc d'une quantité égale à lui-même, et que, par son extrémité, on mène un plan parallèle à la base inférieure de ce tronc, on formera un cylindre droit que le plan de la base supérieure du tronc partagera en deux parties superposables: donc, etc.

LEMME.

733. *L'aire de la surface engendrée par la base* BC *d'un triangle isocèle qui tourne autour d'un axe fixe* XY, *mené dans son plan par son sommet* A, *est équivalente à celle d'un cylindre qui aurait sa hauteur* AM *pour rayon, et pour* Fig. 308.

(*a*) On peut démontrer cette proposition comme celle du n.° 727, en faisant usage de prismes au lieu de pyramides, et en s'appuyant sur le principe établi pour la démonstration du lemme 1, n.° 723.

hauteur la projection B'C' *de sa base sur l'axe de révolution, de sorte qu'elle aura pour mesure le produit de la circonférene dont cette hauteur est le rayon, multipliée par cette projection.*

Il est clair que dans le mouvement de rotation du triangle ABC autour de l'axe XY supposé extérieur à ce triangle, le trapèze BC' engendrera un tronc de cône, de sorte que la surface courbe produite par BC est précisément la surface courbe de ce tronc : ainsi son aire A a pour mesure (729)

$$A = 2\pi \cdot MM' \cdot BC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Mais, si l'on mène par le point C la parallèle CI à l'axe de révolution, on formera le triangle BCI semblable à AMM' (349) : donc leurs côtés homologues nous donneront la proportion (350)

$$AM : BC :: MM' : CI \text{ ou } B'C' \text{; d'où } MM' \cdot BC = AM \cdot B'C' :$$

donc, en substituant dans (1),

$$A = 2\pi \cdot AM \cdot B'C'.$$

Mais cette mesure est indépendante de la grandeur de l'angle CAY; donc elle reste la même, soit que l'axe XY coïncide avec le côté AC, ou qu'il soit parallèle à la base BC; donc notre théorème est démontré dans tous les cas (731).

734. Corollaire. *Si l'on fait tourner un* secteur polygonal

Fig. 309. régulier (*a*) OABCDE *autour de l'un* AO *des deux rayons qui le terminent, l'aire de la surface engendrée par la brisée* ABCDE *sera équivalente à celle d'un cylindre droit dont son apothême est le rayon, et dont la projection de cette brisée sur l'axe de révolution est la hauteur : de sorte qu'elle aura pour mesure la circonférence du cercle inscrit multipliée par cette projection.*

En effet, en tirant les rayons OB, OC, OD, on partage le secteur en triangles isocèles qui tournent chacun autour d'un axe passant par son sommet, et il n'y a plus alors qu'à répéter le raisonnement du n.° 726.

(*a*) On appelle ainsi le secteur formé en joignant les extrémités d'une brisée régulière (567) avec le centre des circonférences inscrite et circonscrite à cette brisée.

THÉORÈME.

735. *L'aire de la calotte sphérique a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle multipliée par sa hauteur.*

En effet, si l'on fait tourner un secteur circulaire autour de l'un des rayons qui le limitent, sa base engendrera une calotte sphérique; or cette base peut être regardée comme une brisée régulière dont les côtés sont infiniment petits : donc, etc.

Si l'on veut démontrer ce théorème indépendamment de toute considération infinitésimale, *on supposera d'abord que l'arc générateur* AB *soit moindre qu'un quadran,* et l'on dira : Si le produit $2\pi OA \cdot AC$ n'est pas la mesure de l'aire de la calotte ABC, il sera la mesure de l'aire d'une calotte détachée par le plan BC dans une sphère d'un rayon plus grand ou plus petit que OA. Supposons-le plus petit, et soit OA' ce rayon, de sorte que Fig. 310.

$$cal\ A'B'C = 2\pi OA \cdot AC.$$

J'inscris au plus grand des arcs AB et A'B' une brisée régulière dont les côtés ne rencontrent pas le plus petit, de sorte que la surface engendrée par cette brisée, en faisant tourner le secteur polygonal autour de AO, ne rencontrera pas non plus la calotte A'B'C. L'aire A de cette surface aura pour mesure (734)

$$A = 2\pi \cdot OM \cdot AC.$$

Or il est évident que le produit $2\pi \cdot OA \cdot AC > 2\pi \cdot OM \cdot AC$: donc l'aire de la calotte A'B'C doit être plus grande que celle engendrée par la brisée ADEB, ce qui est faux : car, si, après avoir plié la figure le long de BC, on la fait tourner autour de AO, on verra que la surface engendrée par la brisée AB*a* enveloppera de toutes parts la surface *convexe* formée de la réunion des deux calottes égales A'B'C et *a*'B'C (*a*); donc sa moitié, c'est-à-dire la surface engendrée par ADEB, est plus grande que la calotte A'B'C au lieu d'être plus petite; donc on ne pouvait pas supposer que le produit $2\pi \cdot OA \cdot AC$ pût être la mesure de l'aire d'une calotte détachée par le plan BC dans une sphère dont le

---

(*a*) C'est pour obtenir une pareille surface que nous avons d'abord supposé que l'arc AB était moindre qu'un quadran : car, s'il eût été plus grand, la courbe A'B'*a* n'eût plus été convexe.

rayon serait plus petit que AO; et, comme on prouverait de la même manière que l'hypothèse contraire ne peut avoir lieu, il est démontré que le produit $2\pi \cdot OA \cdot AC$ est la mesure de l'aire de la calotte ABC.

La démonstration précédente subsistera encore si l'arc AB est un quadran : car l'arc A'B' en sera aussi un, et la réunion des deux calottes A'B'C et *a*'B'C formera une sphère, et par conséquent une surface convexe. Donc *l'aire de la sphère a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée* par le double du rayon, c'est-à-dire *par son diamètre* (*a*); et, comme le diamètre est quadruple de la moitié du rayon, il suit du n.° 431 que *l'aire de la sphère est quadruple de celle d'un grand cercle* (*b*).

Enfin, si l'on considère une calotte GBC engendrée par un arc BG plus grand qu'un quadran, on en obtiendra l'aire en retranchant l'aire de la calotte ABC de celle de la sphère, et l'on trouvera pour sa mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par (AG—AC), c'est-à-dire par sa hauteur GC (*c*).

736. Corollaire I. *L'aire d'une zone quelconque* CBIK *est aussi égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par sa hauteur* CK : car elle est la différence des deux calottes AIK et ABC, et ainsi elle a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par (AK—AC), c'est-à-dire par CK.

737. Corollaire II. *Dans une même sphère, ou dans des sphères égales, les aires des calottes et des zones sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

THÉORÈME.

Fig. 290. 738. *L'aire du fuseau* CNDGC *est égale au quart de*

(*a*) Ainsi *l'aire de la sphère est égale à celle de la surface latérale du cylindre circonscrit.*

(*b*) Ainsi *l'aire de la sphère est les* $\frac{4}{6}$ *ou les* $\frac{2}{3}$ *de celle de la surface totale du cylindre circonscrit* : car celle-ci vaut six fois celle de sa base, c'est-à-dire celle d'un grand cercle de la sphère.

(*c*) Si l'on observe que $\overline{AB}^2 = 2AO \cdot AC$, on verra que *l'aire de la calotte* ABC *a pour mesure* $\pi \overline{AB}^2$, c'est-à-dire qu'elle *est égale à celle d'un cercle qui a pour rayon la corde qui sous-tend son arc générateur.* D'où il suit que, si l'on donne le nombre de degrés de cet arc et le rayon, on pourra calculer l'aire de la calotte au moyen de la table des cordes.

celle de la sphère multiplié par l'angle dièdre formé par les plans des deux demi-circonférences qui le terminent.

Décrivons, en effet, du point C comme pôle, et avec une ouverture de compas égale à un quadran, la circonférence de grand cercle FNGF, et il sera facile de voir, en raisonnant comme au n.o 131, que l'*aire* F *du fuseau* EST *à celle* S *de la sphère*, COMME *l'arc* NG EST *à la circonférence* ON : car deux fuseaux qui interceptent sur cette circonférence des arcs égaux, sont évidemment superposables, et ainsi

$$F : S :: NG : circ\,ON : \text{d'où } F = S \cdot \frac{NG}{circ\,ON}.$$

Mais au rapport de l'arc NG à la circonférence ON, on peut substituer celui du dièdre GCDN à quatre dièdres droits (632) : donc, si l'on prend le dièdre droit pour unité, et que l'on représente par A la mesure de CNDGC, on aura :

$$F = S \cdot \frac{A}{4}, \text{ ou } F = \frac{S}{4} \cdot A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

739. SCHOLIE. *Si l'on prend le triangle sphérique trirectangle pour unité*, l'aire de la sphère vaudra *huit* unités : de sorte que celle du fuseau deviendra $F = 2A$, c'est-à-dire qu'alors l'*aire du fuseau aura pour mesure le double de son angle.*

Si l'on observe que $S = circ\,ON \cdot CD$, on aura : $F = NG \cdot CD$. Ainsi l'on peut dire encore que l'*aire du fuseau a pour mesure le produit du diamètre multiplié par l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme pôle.*

THÉORÈME.

740. *L'aire d'un triangle sphérique est égale à l'excès de la somme de ses angles sur deux droits, en prenant pour unité celle du triangle trirectangle.*

Achevons, en effet, les circonférences dont les trois côtés de notre triangle ABC font partie, et l'on verra que les deux triangles ABC et BCA' composent le fuseau ACA'A ; qu'ainsi (739) Fig. 293.

$$ABC + BCA' = 2A.$$

De même $$ABC + ACB' = 2B.$$

La somme des deux triangles A'B'C et A'B'C' forme le fuseau

CA'C'B'C; mais le triangle A'B'C' est équivalent (647) à son symétrique ABC (a) : donc

$$ABC + A'B'C = 2C.$$

Si maintenant on additionne ces trois équations, on verra que la somme de leurs premiers membres se compose de deux fois le triangle ABC, et des quatre triangles ABC, BCA', ACB' et A'B'C qui composent l'hémisphère CABA'B', lequel vaut quatre triangles trirectangles, c'est-à-dire *quatre unités*; donc on aura :

$$2\,ABC + 4 = 2A + 2B + 2C;$$

d'où $$ABC = A + B + C - 2.$$

Ainsi *un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux droits*, c'est-à-dire *le rapport* de cet excès à l'angle droit.

Exemple. *Quelle est l'aire d'un triangle dont les angles valent respectivement* 120° 10', 95° *et* 48° ? L'excès de la somme des mesures de ces angles sur celle de deux droits est 83° 10' : ainsi il faut prendre le rapport de cet arc à la mesure d'un droit, c'est-à-dire à 90°, ce qui se fera en convertissant ces deux nombres en minutes. On trouvera ainsi que le triangle proposé est les $\frac{4990}{5400} = \frac{499}{540}$ du triangle trirectangle.

741. Corollaire. Si l'on observe que le triangle trirectangle est le huitième de la surface sphérique, on pourra dire que *l'aire d'un triangle sphérique est égale au huitième de celle de la sphère multiplié par l'excès de la somme de ses angles sur deux droits.*

THÉORÈME.

742. *L'aire d'un polygone sphérique dont tous les côtés sont des arcs de grand cercle, a pour mesure la somme de ses angles diminuée d'autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux* (562).

743. Corollaire. *La* capacité *d'un cône quelconque a pour mesure le polygone sphérique qu'il intercepte sur la surface de la sphère au centre de laquelle son sommet serait placé.*

(a) En effet les trois droites AA', BB' et CC', sont trois diamètres de la sphère (625, 2.°); de sorte que les deux triangles ABC et A'B'C' sont interceptés par deux trièdres dont les arêtes de l'un sont les prolongemens de celles de l'autre : ils sont donc bien symétriques (554).

CHAPITRE V.

DE LA COMPARAISON DES AIRES DES CORPS SEMBLABLES.

THÉORÈME.

744. *Les aires des surfaces courbes de deux cônes droits, de deux troncs de cône droits, de deux cylindres droits* SEMBLABLES, *sont proportionnelles aux carrés de leurs génératrices ou des rayons de leurs bases.*

Soient, en effet, T et T', G et G', R et R', r et r', les aires, les génératrices et les rayons des bases inférieures et supérieures de deux troncs de cône droits semblables. On aura (729) :

$$T : T' :: (R + r) G : (R' + r') G' \dots (1).$$

Mais, d'après le théorème du n.º 686,

$$R : R' :: r : r' :: G : G';$$

par conséquent

$$R + r : R' + r' :: G : G' \dots\dots (2);$$

donc, en multipliant par ordre les proportions (1) et (2), et simplifiant la proportion-produit,

$$T : T' :: G^2 : G'^2, \text{et partant} :: R^2 : R'^2 :: r^2 : r'^2.$$

Mais les troncs deviennent des cônes ou des cylindres suivant que r et r' sont nuls ou que r et r' sont respectivement égaux à R et à R' : donc le théorème est démontré.

THÉORÈME.

745. *Les aires de deux calottes, de deux zones, de deux sphères, de deux fuseaux et de deux triangles sphériques* SEMBLABLES *sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

1.º Soient C et C', R et R', h et h' les aires, les rayons et les hauteurs de deux calottes semblables. On aura (735) :

$$C : C' :: R \cdot h : R' \cdot h' \dots\dots (1).$$

Mais il résulte du n.º 687 que les deux triangles B O C et B'O'C' Fig. 310
sont semblables (347), et qu'ainsi

$$R : R' :: OC : O'C';$$

d'où, *dividendo*,

$$h : h' :: R : R' \ldots\ldots (2).$$

Donc, en multipliant par ordre les proportions (1) et (2), et simplifiant,

$$C : C' :: R^2 : R'^2, \text{et partant} :: h^2 : h'^2.$$

2.° Cette démonstration est indépendante des hauteurs des deux calottes, et convient ainsi à deux hémisphères, et par conséquent à deux sphères. Au reste il est évident que les aires de deux sphères sont entr'elles comme $4\pi R^2 : 4\pi R'^2$ ou $:: R^2 : R'^2$.

3.° Soient Z et Z' les aires de deux zones semblables, et C et c, C' et c', celles des calottes semblables dont elles sont les différences. On aura :

$$C : C' :: R^2 : R'^2 :: c : c';$$

d'où

$$C - c \text{ ou } Z : C' - c' \text{ ou } Z' :: R^2 : R'^2.$$

4.° Enfin il suit des théorèmes des n.os 738 et 741 que les aires de deux fuseaux ou de deux triangles sphériques semblables sont proportionnelles à celles des sphères dont ils font partie, et le sont par conséquent aux carrés de leurs rayons.

THÉORÈME.

746. *Les aires de deux corps semblables quelconques sont proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues.*

Si les deux corps sont des polyèdres, il n'y aura qu'à comparer chaque face de l'un avec la face semblable de l'autre, comme on l'a fait au n.° 458 pour les triangles semblables dans lesquels on avait décomposé les deux polygones proposés.

Si les corps sont terminés par des surfaces courbes, on peut concevoir qu'on les ait placés de manière qu'ils aient le même centre de similitude, puis qu'après avoir partagé la surface du premier en triangles curvilignes, on ait conduit des plans par le centre de similitude et par chaque côté. Alors, si l'on mène des plans par les sommets de tous ces triangles, on aura inscrit deux polyèdres semblables dans les deux corps, et les aires de ces polyèdres seront proportionnelles aux carrés de leurs arètes homologues, et par conséquent aux carrés de leurs rayons vecteurs homologues. Mais ceci est vrai quel que soit le nombre des faces des deux polyèdres, et par conséquent lorsque ce nombre est infini, auquel cas on retombe sur les deux corps proposés.

CHAPITRE VI.

DE LA MESURE DES VOLUMES.

747. LE VOLUME *d'un corps est la portion de l'espace renfermée par la surface de ce corps.* Pour mesurer ce volume, on le compare à un autre que l'on prend pour unité. *Nous prendrons désormais pour unité de volume celui du cube dont l'arète est égale à l'unité linéaire*, de sorte que *la mesure du volume d'un corps sera le rapport de son volume à celui du cube qui a pour côté l'unité de longueur.*

THÉORÈME.

748. *Les volumes de deux parallélipipèdes rectangles* AC *et* FI (*a*) *de même base sont proportionnels à leurs hauteurs* AD *et* FK. Fig. 511.

Répétez la démonstration même du n.º 409, en menant, par les points de division des hauteurs, des plans parallèles aux bases.

THÉORÈME.

749. *Les volumes de deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.*

Désignons, en effet, par P et P' les volumes de deux parallélipipèdes, par e et l, par e' et l', les deux côtés contigus de leurs bases respectives. Construisons un troisième parallélipipède rectangle P'' de même hauteur h que les deux premiers, et qui ait en outre même épaisseur e que le premier, et même largeur l' que le second. Cela posé, si l'on compare les deux parallélipipèdes P et P'', et qu'on prenne pour base la face qui, dans chacun, a pour côtés contigus e et h, on verra que l et l' seront alors leurs hauteurs, et qu'ainsi (748)

$$P : P'' :: l : l'.$$

La comparaison du second parallélipipède avec le troisième donnera de même :

$$P'' : P' :: e : e'.$$

(*a*) Désormais nous conviendrons, pour abréger, de désigner un parallélipipède par deux lettres opposées.

Donc, en multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant le facteur P'' commun aux deux termes du premier rapport,

$$P : P' :: l \cdot e : l' \cdot e',$$

ce qui démontre notre théorème (412).

THÉORÈME.

750. *Les volumes de deux parallélipipèdes rectangles sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

Même démonstration qu'au n.º 411.

THÉORÈME.

751. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Désignons, en effet, par P le volume du parallélipipède à mesurer, par B l'aire de sa base, et par h sa hauteur; par C le volume du cube que l'on prend pour unité : sa base sera donc égale à l'unité de surface, et sa hauteur à l'unité linéaire; donc, etc. (Voyez le n.º 412).

752. La vérité de cette proposition devient évidente à l'inspection seule de la figure, lorsque les longueurs des dimensions du rectangle sont des nombres entiers. Mais il est aussi facile de s'en assurer lorsqu'elles sont fractionnaires : car, soit le pa-
Fig. 312. rallélipipède CE, dont les trois arêtes valent respectivement $4^{m}\frac{2}{5}$, $3^{m}\frac{1}{3}$ et $2\frac{3}{4}$. Par les points de division de chaque arête je mène des plans parallèles à celui des deux autres, ce qui partage notre volume en mètres cubes et en parties de mètres cubes. Le parallélipipède HM est les $\frac{2}{5}$ d'un mètre cube (748) : donc la tranche IABH vaut $4^{m.c}\frac{2}{5}$; donc IABK égale $4^{m.c}\frac{2}{5} \cdot 3$. Or, puisque $KC = \frac{1}{3}^{m}$, la tranche LKCD est le tiers de IABH, et vaut ainsi $4^{m.c}\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$, de sorte que $IABCD = 4^{m.c}\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$, et par conséquent $OABCD = 4^{m.c}\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 2$. Mais, puisque $EO = \frac{3}{4}^{m}$, on voit que la tranche OGEF est les $\frac{3}{4}$ de IABCD, et vaut ainsi $4^{m.c}\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$; donc enfin le parallélipipède EC vaut $4^{m.c}\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{4}$.

753. **Corollaire.** Si l'on observe que l'aire de la base est égale au produit de ses deux arêtes contiguës, on en conclura

que *le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.*

THÉORÈME.

754. *Le volume d'un cube a pour mesure la troisième puissance de son arète.*

En effet, le cube étant un parallélipipède rectangle dont les trois arètes sont égales, son volume aura pour mesure la troisième puissance de l'une d'elles (*a*).

755. COROLLAIRE. En France, où l'unité linéaire est le mètre, *l'unité de volume est le* MÈTRE CUBE. *Cette unité se subdivise en mille décimètres cubes, le décimètre cube vaut mille centimètres cubes, et le centimètre cube vaut mille millimètres cubes :* ainsi, *pour convertir un nombre quelconque de mètres cubes en* DÉCIMÈTRES CUBES, *ou en* CENTIMÈTRES CUBES, *ou en* MILLIMÈTRES CUBES, *il suffit d'avancer la virgule de* TROIS, *ou de* SIX, *ou de* NEUF *rangs vers la droite.*

Autrefois *l'unité de volume était la* TOISE CUBE, *laquelle valait* 216 *pieds cubes. Le pied cube se composait de* 1728 *pouces cubes, et le pouce cube de* 1728 *lignes cubes.*

Lorsque les dimensions d'un parallélipipède rectangle sont exprimées en toises et fractions de toise, ce qu'il y a de mieux à faire est de convertir chacune d'elles en unités du dernier ordre. Proposons-nous, par exemple, de trouver le côté d'un cube équivalent à un parallélipipède rectangle dont les trois arètes contiguës vaudraient respectivement $2^t\,3^p$, 3^t, et $4^p\,5^p$: on réduira ces trois nombres en pouces, et, en multipliant les résultats entre eux, on trouvera que le volume du cube équivaut à 2060640 pouces cubes (*b*); de sorte qu'en extrayant la racine cubique du nombre abstrait 2060640, on aura la longueur de son arète. On trouve pour sa valeur $127^p = 1^t\,4^p\,7^p$.

(*a*) Ainsi, lorsque l'on forme la troisième puissance d'un nombre, on exécute l'opération nécessaire pour évaluer le volume du cube dont l'arète contiendrait ce nombre-là d'unités linéaires. C'est pour cela que l'on a appelé cube d'un nombre la troisième puissance de ce nombre.

(*b*) Si l'on veut évaluer ce volume en toises cubes et en pieds cubes, on divisera le nombre 2060640 par 1728, puis le quotient par 216, et l'on trouvera ainsi $5^{t.c}\,112^{p.c}\,864^{p.c}$

THÉORÈME.

Fig. 512. 756. *Deux parallélipipèdes* AG et AM *sont équivalens lorsqu'ils ont une face commune* AC, *et que les faces opposées à celle-ci* EG *et* KM *sont situées dans un même plan et comprises entre les mêmes parallèles* EL *et* IM.

En effet le prisme triangulaire EAKIDN est égal à FBLGCM : car le parallélogramme AI est égal à BG, comme faces opposées du même parallélipipède AG (664); par la même raison, AN est égal à BM; de plus le triangle EAK est égal à FBL, comme ayant un angle égal (88) compris entre côtés égaux (223) : donc les prismes EAKIDN et FBLGCM ont un angle trièdre compris entre trois faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées; donc ils sont égaux (673). Mais, si l'on retranche le premier du polyèdre ABCDELMI, il reste le parallélipipède AG; et, si l'on retranche le second prisme du même polyèdre, il reste le parallélipipède AM : donc ces deux parallélipipèdes sont équivalens.

THÉORÈME.

Fig. 513. 757. *Deux parallélipipèdes* AG *et* AM *de même base et de même hauteur sont équivalens.*

En effet, puisque ces parallélipipèdes ont la même base inférieure et la même hauteur, leurs bases supérieures EG et KI doivent se trouver dans un même plan. Si donc on prolonge les plans des faces AI et DG du premier, ainsi que les plans des faces AL et BM du second, on formera un troisième parallélipipède AR (663), qui sera équivalent à chacun des deux autres AG et AM : car ils ont tous trois la face commune AC; et les faces opposées à celle-ci PR et EG, PR et KM, sont situées dans le même plan, et comprises entre les mêmes parallèles PI et GS, PL et QM : donc les deux parallélipipèdes *AG et AM* sont équivalens.

THÉORÈME.

Fig. 512. 758. *Tout parallélipipède peut être transformé en un parallélipipède rectangle de base équivalente et de même hauteur.*

Soit ABFE la base du parallélipipède proposé. Menons par chacun des côtés de ce parallélogramme des plans perpendiculaires à son plan. L'espace AG, compris entre eux et les plans

des bases du parallélipipède proposé, sera un parallélipipède droit (535) qui lui sera équivalent (757). Si donc la base AF était un rectangle, le théorème serait démontré. S'il n'en est pas ainsi, menez aux points A et B les perpendiculaires AK et BL terminées au prolongement de EF, puis conduisez des plans par les droites AD et AK, BC et BL, et vous formerez ainsi un parallélipipède rectangle AM (666) équivalent au parallélipipède proposé (756), qui aura même hauteur AD que lui, et une base AL équivalente à la sienne AF (234).

759. Corollaire. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (751).

THÉORÈME.

760. *Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur.*

Soit ABCDFG le prisme proposé. Je mène par les arètes BF et GC des plans parallèles à ses faces respectives AG et AF, et je forme ainsi un parallélipipède AK, que le plan CF partage en deux prismes triangulaires ABCDFG et BCIGFK (*a*) : donc, en démontrant qu'ils sont équivalens, j'aurai prouvé que le premier est la moitié du parallélipipède AK. Pour y parvenir, je prends sur le prolongement de l'arète AD une longueur A'D'=AD, puis je mène par les points D' et A' deux plans perpendiculaires à cette arète, et l'espace compris entre eux et les plans des faces latérales du parallélipipède AK, sera un parallélipipède droit A'K', que le plan CF partagera en deux prismes droits égaux (674). Or je dis que chacun d'eux est équivalent au prisme oblique correspondant : car, si l'on porte le tronc de prisme A'B'C'ABC sur D'F'G'DFG, on pourra évidemment faire coïncider leurs bases inférieures A'B'C' et D'F'G', et alors leurs arètes latérales coïncideront aussi (489); mais, puisque A'D'=AD, on voit que AA'=DD' : donc le point A tombera sur D; il en sera de même des sommets C et B à l'égard de leurs homologues G et F, de sorte que les deux polyèdres A'B'C'ABC et D'F'G'DFG se recouvriront parfaitement : donc ils sont égaux; mais, si de chacun d'eux on retranche le tronc de prisme D'F'G'ABC, il restera Fig. 314.

(*a*) *Ces prismes sont* SYMÉTRIQUES *par rapport au centre du parallélipipède* (664 et 707.)

d'une part le prisme droit A'B'C'D'F'G', et de l'autre le prisme oblique ABCDFG : donc ils sont équivalens. Il en est évidemment de même de B'C'I'G'F'K' et de BCIGFK : donc enfin les deux prismes ABCDFG et BCIGFK sont équivalens; donc chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AK de base double et de même hauteur.

761. Corollaire i. *Le volume de tout prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, un prisme triangulaire quelconque étant la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur, son volume aura pour mesure la moitié de la base de ce parallélipipède multipliée par sa hauteur, c'est-à-dire le produit même de sa base par sa hauteur.

762. Corollaire ii. *Le volume d'un prisme* polygonal *quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hau-*
Fig. 500. *teur :* car, si l'on partage la base ABCDE en triangles par des diagonales, et que par ces lignes et les arètes auxquelles elles aboutissent on mène des plans, on partagera le prisme AI en prismes triangulaires qui auront même hauteur que ce prisme, et dont chacun aura pour mesure le produit du triangle qui lui sert de base multiplié par cette hauteur. Dans l'addition de ces volumes partiels on pourra mettre la hauteur en facteur commun, et alors on trouvera, pour l'expression du volume demandé, la somme des triangles qui composent la base du prisme AI, c'est-à-dire cette base multipliée par sa hauteur.

763. Corollaire iii. *Le volume d'un cylindre quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (671). On peut aussi le démontrer directement en imitant la démonstration du n.º 727, (*a*).

Exemple. Quelle est la mesure de l'effort exercé sur le piston d'une machine à vapeur, en supposant que le diamètre de ce piston soit 5 décimètres, et que l'on travaille sous une pression de 3 atmosphères? L'aire du piston est $\frac{1}{4}\,25^{\text{d.m.q}}.3{,}142 = 19^{\text{d.m.q}},64$. Mais la pression atmosphérique est égale au poids d'une colonne d'eau de $10^{\text{m}},4$ de hauteur : donc l'effort exercé sur le piston est le poids d'une colonne d'eau dont le volume est $(19{,}64 \cdot 10{,}4 \cdot 3)^{\text{d.m.c}}$, c'est-à-dire qu'il est égal à $612^{\text{K.o}},69$.

764. Corollaire iv. *Le volume d'un tronc de cylindre*

circulaire droit a pour mesure le produit de sa base par son axe (732).

THÉORÈME.

765. *Deux tétraèdres* SABC *et sabc qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales* SO *et so, sont équivalens.*

Supposons, en effet, que les deux tétraèdres ne soient pas équivalens, et que le volume du premier soit le plus grand. On pourra toujours construire sur sa base ABC un prisme équivalent à la différence des deux volumes : car il suffira, pour avoir sa hauteur OG, de diviser cette différence par la moitié de l'aire du triangle ABC (761). Cela posé, partageons la hauteur SO en parties égales et plus petites que OG, de sorte qu'il tombera au moins un point de division I entre O et G; puis, après avoir placé les bases des deux tétraèdres sur un même plan, menons par tous les points I, K, L, des plans parallèles à celui-ci. Les tétraèdres seront ainsi partagés en tranches de même hauteur, et dont les bases seront équivalentes chacune à chacune (662). Conduisons actuellement par chacun des côtés BC, B'C', B''C'', B'''C''', des plans BE', B'E'', B''E''', B'''E^{IV}, parallèles à l'arète SA, et par les côtés *b'c'*, *b''c''*, *b'''c'''*, des plans *b'e*, *b''e'*, *b'''e''*, parallèles à l'arète *sa*; et, de plus, par le sommet S du premier tétraèdre menons un plan parallèle à sa base (*a*). Nous formerons ainsi deux séries de prismes, les uns plus grands, les autres plus petits que les tranches pyramidales qui leur correspondent, de sorte que la différence entre la somme des prismes circonscrits aux tranches du premier tétraèdre et celle des prismes inscrits aux tranches du deuxième surpassera la différence de ces deux tétraèdres. Mais la différence de ces deux sommes de prismes est le prisme ABCE' : car tous les prismes circonscrits sont, à partir du deuxième A'B'C'E'', équivalens aux prismes inscrits, comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales chacune à chacune : donc le prisme ABCE' doit être plus grand que le prisme équivalent à la différence des deux tétraèdres, ce qui ne se peut; car ils ont la même base ABC, et la hauteur OI du pre-

(*a*) Les traces du plan BE' sur les faces du dièdre SA se construisent en tirant par les points B et C des parallèles BD' et CE' à SA, terminées aux prolongemens de A'B' et de A'C', et la droite D'E' est sa trace sur le plan A'B'C'.

mier est moindre que celle OG du deuxième. Donc on ne pouvait pas supposer que les deux tétraèdres SABC et *sabc* ne fussent pas équivalens : donc ils le sont (*a*).

THÉORÈME.

Fig. 516. 766. *Un tronc de prisme triangulaire est la somme de trois tétraèdres de même base* DEF *que lui, et dont les sommets sont ceux* A, B, C, *de sa base supérieure.*

Menons, en effet, par le point A et l'arète FE, un plan dont les traces sur les faces CD et BD seront les droites AF et AE. Nous retrancherons du tronc le tétraèdre AFDE, dont la base est celle même du tronc, et qui a pour sommet l'un de ceux A *de la base supérieure*. Il restera alors une pyramide *quadrangulaire* ABCFE que l'on partagera en deux tétraèdres ACFE et ACBE en faisant passer par ses arètes AC et AE un plan qui coupera sa base suivant CE. On peut substituer au premier le tétraèdre CDFE : car ils ont la même base CFE et même hauteur, puisque leurs sommets A et D sont situés sur une parallèle AD au plan de cette base (502) ; *mais on peut* regarder ce tétraèdre CDFE comme ayant pour *base* celle même DFE *du* tronc, et pour sommet celui C de sa base supérieure : *ainsi il* satisfait encore aux conditions de l'énoncé.

Il ne s'agit donc plus que de prouver que le troisième tétraèdre ACBE est équivalent au tétraèdre BDFE qui a pour base le triangle DFE, et pour sommet le troisième sommet B *de* la base supérieure du tronc. Or la chose est manifeste : car, si l'on considére BDFE comme ayant pour base le triangle BFE, et pour sommet le point D, on reconnaîtra que sa base est *équivalente* à celle de ACBE (236), et qu'il a même hauteur *que* lui, puisque leurs sommets D et A sont sur une parallèle *au plan* de ces bases.

(*a*) On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante :
Supposons qu'après avoir posé les bases des deux tétraèdres sur un même plan, on divise la hauteur SO en une infinité de parties égales, et qu'on mène ensuite par tous les points de division des plans parallèles à celui des bases. Les deux tétraèdres seront ainsi partagés en une infinité de tranches que l'on pourra évidemment regarder comme des prismes triangulaires. Mais ces prismes ont deux à deux des bases équivalentes (662) et des hauteurs égales : donc ils sont équivalens; donc il en est de même des deux tétraèdres, puisqu'ils sont ainsi composés de parties équivalentes chacune à chacune.

767. Corollaire i. Comme cette démonstration est tout-à-fait indépendante de l'inclinaison mutuelle des plans ABC et DEF, on voit qu'elle convient au cas où ces plans sont parallèles, c'est-à-dire au cas où le polyèdre ABCDEF est un prisme. Mais alors les trois tétraèdres dont il est la somme sont équivalens (765) : donc il est triple de chacun d'eux ; donc *un tétraèdre est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur, et, par conséquent, son volume a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

768. Corollaire ii. *Le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.* (Répéter ici le raisonnement du n.° 762).

769. Corollaire iii. *Deux pyramides symétriques sont équivalentes :* car, en prenant le plan de la base de l'une pour plan de symétrie, il devient alors évident qu'elles ont des hauteurs égales.

770. Corollaire iv. *Le volume d'un cône quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (658).

771. Corollaire v. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base inférieure par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées sur cette base des sommets de l'autre.* On le reconnaît en additionnant les volumes des trois tétraèdres qui le composent, et mettant la base en facteur commun.

THÉORÈME.

772. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est la somme de trois pyramides de même hauteur que lui, et dont les bases respectives seraient les deux bases du tronc et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Soit TGHIKL une pyramide quelconque. Transformons sa base en un triangle DEF, et construisons sur ce triangle un tétraèdre de même hauteur que la pyramide. Alors, si, ayant placé les deux bases sur un même plan, on coupe les deux polyèdres par un plan parallèle à celui-là, on déterminera deux sections MNOPQ et ABC qui seront équivalentes : car elles sont proportionnelles aux bases. Les deux pyramides retranchées sont donc équivalentes, puisqu'elles ont même hauteur et Fig. 317.

des bases équivalentes. Mais les pyramides totales *le sont* aussi par la même raison : donc les deux troncs sont équivalens ; et, comme ils ont même hauteur et des bases équivalentes, on voit que, si l'on peut démontrer le théorème pour le tronc de pyramide triangulaire, il le sera aussi pour le tronc de pyramide polygonale.

Menons un plan par le point A et l'arète FE, et nous retrancherons du tronc ABCDEF le tétraèdre ADFE qui a pour base la base inférieure du tronc et même hauteur que lui, puisque son sommet A est un de ceux de la base supérieure. Il restera alors la pyramide quadrangulaire ABCFE, que l'on partagera en deux tétraèdres ACFE et ABCE, en faisant passer un plan par ses arètes AC et AE. Le second a pour base la base supérieure du tronc, et même hauteur que lui, puisque son sommet E est un de ceux de la base inférieure : ainsi nous avons déjà deux des trois pyramides dont il s'agit.

Or, si l'on prend FG=CA, et que par le point G et la droite CE on mène un plan dont les traces sur les faces SFD et FDE seront CG et GE, on formera un tétraèdre CFGE, que l'on pourra substituer au troisième tétraèdre ACFE : car ils ont la même base CFE, et leurs sommets G et A sont situés sur une parallèle au plan de cette base. Mais, en prenant le point C pour sommet de CFGE, ce tétraèdre a même hauteur que le tronc : si donc on peut prouver que sa base FGE est moyenne proportionnelle entre celles de ce tronc, le théorème sera démontré. Pour le faire voir, je prends FI=CB, et je joins GI, ce qui forme le triangle FGI égal à ABC (199). Or les deux triangles FGI et FGE ont leurs bases FI et FE en ligne droite, et leurs sommets au même point G : donc ils ont même hauteur ; donc ils sont entr'eux comme leurs bases (420) ; donc

FGI ou ABC : FGE :: FI ou BC : FE.

La comparaison des triangles FGE et FDE donne semblablement :

FGE : FDE :: FG ou AC : FD.

Mais les triangles semblables (348) ABC et FDE ont leurs côtés homologues proportionnels : ainsi le rapport de BC à FE est égal à celui de AC à FD ; donc, les seconds rapports de nos deux proportions étant égaux, les premiers le sont aussi, et l'on a par conséquent :

ABC : FGE :: FGE : FDE,

ce qui prouve que le triangle FGE est moyen proportionnel entre les deux bases du tronc, et achève, par conséquent, de démontrer notre théorème.

773. Corollaire i. *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles a pour mesure le produit de sa hauteur par la somme faite de ses deux bases et de leur moyenne proportionnelle.*

774. Corollaire ii. *Un tronc de cône à bases parallèles est la somme de trois cônes de même hauteur que lui, et dont les bases respectives seraient les bases mêmes du tronc et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases :* car notre démonstration est indépendante de la figure de la base de la pyramide, et convient ainsi au cas où cette base serait une courbe quelconque.

Si le tronc de cône est circulaire, et qu'on désigne par h sa hauteur, par R et par r les rayons de ses bases, on trouvera facilement que la mesure de son volume a pour expression :

$$\tfrac{1}{3}\pi h(\mathrm{R}^2 + r^2 + \mathrm{R}r).$$

Ainsi *le volume d'un tronc de cône circulaire à bases parallèles a pour mesure le tiers du produit du rapport de la circonférence au diamètre multiplié par sa hauteur, et encore par la somme faite des carrés des rayons de ses bases et de leur produit.*

Premier exemple. *Mesurer le volume d'une portion de mur en tour ronde, connaissant le rayon intérieur de la tour, l'épaisseur du talus, la hauteur du mur et le nombre de degrés de l'arc.* Ce volume est évidemment la différence de ceux de deux secteurs semblables de cône tronqué et de cylindre : ainsi il n'y aura qu'à évaluer les volumes de ces deux corps, en prendre la différence, ce qui donnera la mesure V de l'anneau compris entre leurs surfaces, et l'on aura enfin le volume demandé V par la proportion..... $360^\circ : n^\circ :: \mathrm{V} : v$.

Deuxième exemple. *Mesurer la capacité d'un tonneau.*

Si l'on suppose que l'on ait divisé l'axe du tonneau en quatre parties égales, et mené par les points ainsi déterminés des plans perpendiculaires à cet axe, on aura partagé le tonneau en quatre parties que l'on pourra, à fort peu près, regarder comme

des troncs de cône; de sorte qu'en les évaluant d'après la règle précédente, on aura résolu la question (a).

PROBLÈME.

775. *Evaluer le volume d'un tronc de pyramide dont les bases ne sont point parallèles.*

La question revient évidemment à déterminer les hauteurs de la pyramide totale et de la pyramide retranchée. Pour déterminer celle de la première, je fais aux points G et H deux angles égaux à QGH et à MHG, puis du sommet du triangle résultant j'abaisse sur GH la perpendiculaire indéfinie T'RO. Alors, si l'on rabat ce triangle sur TGH, le point T' ira se *placer* sur T, de sorte que les deux droites TR et RO *détermineront* un plan perpendiculaire à la base de la pyramide : donc le pied de sa hauteur se trouvera sur T'RO; donc si l'on fait aussi aux points H et I des angles égaux à MHI et à NIH, et que du point T'' on abaisse une perpendiculaire T''S sur HI, le pied de la hauteur de la pyramide devra aussi se trouver sur le prolongement de cette droite; donc il sera le point O. On connaîtra donc dans le triangle rectangle TRO l'hypothénuse TR = T'R et le côté RO : donc il sera facile de déterminer TO. Une construction semblable fera connaître la hauteur de la petite pyramide.

Fig. 317.

THÉORÈME.

776. *Le volume d'un tronc de parallélipipède a pour mesure le produit de sa base inférieure par le quart de la*

(a) On a trouvé que le rayon de l'une des sections intermédiaires valait à très-peu près $\frac{2R+r}{3}$, en désignant par R et r les rayons du *bouge* et du *fond*. Alors, si l'on appelle l la longueur du tonneau, on trouvera facilement, pour expression de sa capacité, $\frac{\pi l}{54}(25R^2+17Rr+14r^2)$, formule qui donnera très-exactement la capacité du tonneau, en augmentant le résultat trouvé de ses *deux centièmes*.

Remarquons que l'application de cette formule n'exigera que la seule mesure de r : car la longueur intérieure d'un tonneau, le diamètre du bouge et celui du fond, sont dans le rapport des nombres 21, 18 et 16. Si donc on a trouvé que $2r = 0^m,435$, on en conclura, par de simples proportions, que $2R = 0^m,490$, et que $l = 0,572$. Telles sont les dimensions de l'hectolitre; et, en effet, en substituant dans la formule, et faisant la correction indiquée, on trouve juste cent décimètres cubes, c'est-à-dire cent litres.

somme des perpendiculaires abaissées sur cette base des sommets de l'autre.

Désignons par a, b, c, d, les perpendiculaires abaissées des sommets respectifs A, B, C, D, de la base supérieure sur la base inférieure, et représentons l'aire de celle-ci par B. Cela posé, si nous menons un plan par les deux arètes opposées AE et CG, nous décomposerons le tronc de parallélipipède en deux prismes triangulaires tronqués dont les mesures seront respectivement Fig. 318.

$$\frac{B}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}, \text{ et } \frac{B}{2} \cdot \frac{a+c+d}{3}.$$

Si nous conduisons de même un plan par les deux arètes BF et DH, nous décomposerons notre tronc en deux nouveaux prismes tronqués dont les volumes auront pour mesures

$$\frac{B}{2} \cdot \frac{a+b+d}{3} \text{ et } \frac{B}{2} \cdot \frac{b+c+d}{3}.$$

Si nous ajoutons ces quatre produits, nous aurons évidemment le double du volume V du tronc de parallélipipède : donc, en mettant $\frac{B}{2}$ en facteur commun, il viendra

$$2V = \frac{B}{2}(a+b+c+d):$$

car chacune des perpendiculaires a, b, c, d, est répétée *trois* fois. Divisant par 2, on aura enfin

$$V = \frac{B}{4}(a+b+c+d), \text{ ou } V = B \cdot \frac{a+b+c+d}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈME.

777. *Calculer le volume d'un polyèdre quelconque.*

Il n'y aura qu'à décomposer ce polyèdre en pyramides, et évaluer le volume de chacune d'elles.

Mais la nature du polyèdre proposé fournit souvent des moyens plus simples d'en obtenir le volume. Supposons, par exemple, qu'on demande le volume de deux murs en talus terminés chacun par un plan perpendiculaire à sa direction, et soient ABCDEF et A'B'C'D'E'F' les plans inférieur et supérieur Fig. 319. de ces murs. Le plan EBE'B' partage le volume demandé en deux troncs de prisme droits FC'EB' et DA'EB', faciles à me-

surer en les décomposant en troncs de prisme triangulaires. En désignant par a, b, a', b', c, c' et h les arètes BC, EF, B'C', E'F', CF, C'F' et FF', on trouvera pour le premier tronc FC'EB' :

$$V = \frac{h}{6} \{ c'(a + a' + b') + c(a + b + b') \}.$$

Si l'on suppose que ce volume soit symétrique par rapport à un plan perpendiculaire sur le milieu de BC, cette formule deviendra

$$V = \frac{h}{6} \{ c'(2a' + a) + c(2a + a') \}.$$

Si $c' = 0$, elle se réduit à $V = \frac{ch}{6}(2a + a')$,

formules qui serviront à calculer les capacités des fossés.

THÉORÈME.

778. *Le corps engendré par la révolution d'un triangle autour d'un axe mené dans son plan et par son sommet, est équivalent à une pyramide de même hauteur que ce triangle, et dont l'aire de la base serait égale à celle de la surface engendrée par la base de ce même triangle, de sorte que le volume du corps dont il s'agit a pour mesure le produit de l'aire engendrée par la base du triangle multipliée par le tiers de sa hauteur.*

Il peut arriver trois cas, suivant que l'axe de révolution coïncidera avec un des côtés du triangle, qu'il rencontrera sa base, ou qu'il lui sera parallèle :

1.° Supposons que le triangle ABC tourne autour de son côté AC : il est clair que le volume V qu'il engendrera sera la somme des cônes produits par la rotation des triangles ABB' et BCB'; mais, comme ils ont la même base, on voit que la somme de leurs volumes est égale au tiers du produit de cette base par la somme de leurs hauteurs AB' et B'C : donc

Fig. 320.

$$V = \tfrac{1}{3} \pi \overline{BB'}^2 \cdot AC.$$

Or l'aire A de la surface engendrée par BC a pour mesure $A = \pi BB' \cdot BC$; d'un autre côté la similitude des triangles AMC et BCB' (347) donne la proportion

$$AM : BB' :: AC : BC; \text{ d'où } BB' \cdot AC = BC \cdot AM;$$

et, par conséquent, en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $\frac{1}{3} \pi BB'$,

$$\tfrac{1}{3} \pi \overline{BB'}^2 \cdot AC = \tfrac{1}{3} \pi BB' \cdot BC \cdot AM.$$

Mais le premier membre de cette équation est la mesure du volume cherché V, le produit π BB' · BC est celle de l'aire A engendrée par BC; donc nous aurons enfin, en remplaçant:

$$V = \tfrac{1}{3} A \cdot AM, \text{ ou } V = A \cdot \tfrac{1}{3} AM,$$

conformément à l'énoncé (768).

2.° Supposons maintenant qu'il s'agisse du triangle ABD tournant autour de AC. Le volume demandé sera alors la différence des volumes engendrés par les triangles ABC et ADC; et, comme chacun a pour mesure le produit de l'aire de la surface décrite par sa base, multipliée par le tiers de la hauteur commune AM, on voit que la mesure que l'on cherche est encore égale à la différence des aires de ces deux surfaces, c'est-à-dire à l'aire engendrée par BD, multipliée par le tiers de AM.

3.° Les cônes engendrés par les triangles BAB' et DAD' sont les tiers respectifs des cylindres AMBB' et AMDD': donc leur somme est le tiers du cylindre BDD'B', et, par conséquent, le volume engendré par le triangle ABD est les deux tiers de celui de ce cylindre; ainsi Fig. 321.

$$V = \tfrac{2}{3}\pi \overline{AM}^2 \cdot BD = 2\pi AM \cdot BD \times \tfrac{1}{3} AM.$$

Mais $2\pi AM \cdot BD$ est la mesure de l'aire A de la surface cylindrique engendrée par BD: donc encore

$$V = A \cdot \tfrac{1}{3} AM.$$

779. Corollaire. *Le volume engendré par la révolution d'un secteur polygonal régulier autour d'un des rayons qui le terminent, a pour mesure l'aire de la surface engendrée par sa base multipliée par le tiers de son apothême* (734).

THÉORÈME.

780. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de la calotte qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon.*

On peut, en effet, regarder cette calotte comme une portion de surface polyédrale dont les faces seraient infiniment petites; de sorte qu'en menant des plans par le centre de la sphère et par chacune des arètes de cette surface, on décomposera le secteur sphérique en une infinité de pyramides qui auront pour hauteur commune le rayon de la sphère, etc.

Si l'on ne veut pas s'appuyer sur la méthode infinitésimale,

Fig. 522. on dira : Si le produit $cal\,ABC\cdot\frac{1}{3}AO$ n'est pas la mesure du volume du secteur ABO, il sera la mesure d'un secteur sphérique semblable appartenant à une sphère d'un rayon plus grand ou plus petit que OA. Supposons-le plus grand, et soit OA' ce rayon, de sorte que

$$sect\,A'B'O = cal\,ABC\cdot\tfrac{1}{3}AO.$$

J'inscris dans le plus grand des deux arcs AB et A'B' une brisée régulière dont les côtés ne rencontrent pas le plus petit : le volume V engendré par le secteur polygonal régulier OA'DEB', aura pour mesure

$$V = A\cdot\tfrac{1}{3}OM,$$

en désignant par A l'aire engendrée par la brisée A'DEB'. Or $\frac{1}{3}OM$ est évidemment plus grand que $\frac{1}{3}OA$; mais *lequel est le plus grand des deux facteurs* $cal\,ABC$ et A ? Pour le savoir, évaluons les mesures de ces quantités.

$$cal\,ABC = 2\pi OA\cdot AC\ (735),\quad A = 2\pi OM\cdot A'C'\ (734).$$

Or A'A, l'égal de B'B, est plus grand que C'C : donc, en ajoutant de part et d'autre AC', on aura $A'C' > AC$. Mais OM est aussi plus grand que OA : donc la mesure de l'aire A est plus grande que celle de $cal\,ABC$; donc le volume V engendré par le secteur polygonal OA'DEB' est plus grand que celui du secteur sphérique A'B'O, ce qui est évidemment absurde; donc on ne pouvait pas supposer que le produit $cal\,ABC\cdot\frac{1}{3}OA$ fût la mesure du volume d'un secteur semblable à OAB, mais appartenant à une sphère d'un rayon plus grand que OA. On prouverait de même que ce rayon ne peut être plus petit: donc il est OA; donc, etc.

781. Corollaire I. *Le volume de la sphère a pour mesure l'aire de la surface sphérique multipliée par le tiers du rayon.* Si donc on désigne ce rayon par R, on aura pour expression de ce volume :

$$sph\,R = 4\pi R^2\cdot\tfrac{1}{3}R\ (a) = \tfrac{4}{3}\pi R^3 :$$

(a) Ou, ce qui revient au même, à l'aire d'un grand cercle multipliée par les $\frac{4}{3}$ du rayon (432), ou par les $\frac{2}{3}$ du diamètre ; mais le volume du cylindre circonscrit à la sphère est égal à l'aire d'un grand cercle multipliée par le diamètre : donc *le volume de la sphère est les $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre circonscrit.* Ce théorème et ceux énoncés dans les notes (a) et (b) du n.° 735 sont dus à *Archimède.*

ainsi on peut dire que *le volume de la sphère a pour mesure les quatre tiers du rapport de la circonférence au diamètre multiplié par le cube du rayon*, ou *le sixième de ce rapport multiplié par le cube du diamètre* D : car on a $R=\frac{D}{2}$, et partant $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3$.

782. Corollaire II. *Le volume du coin est égal au quart de celui de la sphère multiplié par son angle.*

THÉORÈME.

783. *Le volume engendré par la révolution d'un segment de cercle* AMBA *autour d'un diamètre extérieur à ce segment, est le sixième d'un cylindre qui aurait pour rayon la corde* AB *de ce segment, et pour hauteur la projection* A'B' *de cette corde sur l'axe de révolution* OC. Fig. 323.

Joignons, en effet, OA et OB, et il est clair que le corps engendré par le segment AMBA sera précisément la différence de ceux engendrés par le secteur OAMB et par le triangle OAB. Or, le premier de ces corps étant la différence des deux secteurs sphériques OCB et OCA, son volume sera égal au tiers du rayon multiplié par la différence des calottes qui leur servent de base, c'est-à-dire par l'aire de la zone AMBB'A' : ainsi

$$vol\,OAMB = zone\,AMB\cdot\frac{AO}{3}=\frac{2}{3}\pi\overline{AO}^2\cdot A'B' \text{ (735).}$$

D'un autre côté, le volume engendré par le triangle OAB a pour expression (778)

$$vol\,OAB = surf\,AB\cdot\frac{OI}{3}=\frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2\cdot A'B' \text{ (734)} :$$

donc

$$vol\,AMBA=\frac{2}{3}\pi A'B'(\overline{AO}^2-\overline{OI}^2).$$

Mais le triangle rectangle AOI donne :

$$\overline{AO}^2-\overline{OI}^2=\overline{AI}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4} :$$

car $AI=\frac{AB}{2}$. Donc on aura enfin, en remplaçant :

$$vol\,AMBA=\frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2\cdot A'B',$$

ce qui démontre notre théorème (763).

THÉORÈME.

784. *Le volume d'une tranche sphérique est égal à celui d'un cylindre de même hauteur que la tranche, et ayant*

pour base la demi-somme de ses bases, plus le volume d'une sphère qui aurait pour diamètre la hauteur de la tranche.

Considérons la tranche engendrée par la révolution du segment A'AMBB' autour du diamètre CD. Son volume V se compose de ceux engendrés par le segment AMBA et par le trapèze AB'; ainsi il a pour expression (783 et 774):

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \cdot A'B' + \frac{2}{6}\pi A'B'(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + AA' \cdot BB');$$

ou, en mettant $\frac{1}{6}\pi A'B'$ en facteur commun,

$$V = \frac{1}{6}\pi A'B'(\overline{AB}^2 + 2\overline{AA'}^2 + 2\overline{BB'}^2 + 2AA' \cdot BB').$$

Or, comme nous voulons exprimer le volume de la tranche en fonction seulement de ses bases et de sa hauteur, il faut éliminer $\overline{AB}^2$ de l'expression précédente. Pour cela j'abaisse *sur BB' la* perpendiculaire AF, et le triangle rectangle *ABF me* donne: $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2$. Mais, BF étant la différence des droites BB' et AA', son carré vaut $\overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2AA' \cdot BB'$ (447): donc $\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2AA' \cdot BB'$, car $AF = A'B'$; donc, en remplaçant dans l'expression de V, il viendra, après avoir réduit,

$$V = \frac{1}{6}\pi A'B'(\overline{A'B'}^2 + 3\overline{AA'}^2 + 3\overline{BB'}^2),$$

ou, en effectuant la multiplication de $\overline{A'B'}^2$ par $\frac{1}{6}\pi A'B'$, et celle de $3\overline{AA'}^2 + 3\overline{BB'}^2$ par $\frac{1}{6}\pi$,

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{A'B'}^3 + A'B'\left(\frac{\pi\overline{AA'}^2 + \pi\overline{BB'}^2}{2}\right),$$

formule qui démontre notre théorème: car $\frac{1}{6}\pi\overline{A'B'}^3$ est le volume de la sphère dont A'B' est le diamètre, et $\frac{\pi\overline{AA'}^2 + \pi\overline{BB'}^2}{2}$ peut être regardé comme un cercle dont l'aire serait la demi-somme des bases de la tranche.

785. Corollaire. En observant qu'un segment sphérique peut être considéré comme une tranche dont la base supérieure est nulle, on voit qu'*un segment sphérique est la moitié d'un cylindre de même base et de même hauteur que lui, plus la sphère dont cette hauteur est le diamètre* (*a*).

(*a*) On peut obtenir le volume d'un segment sphérique ACA' en retranchant le cône AOA' du secteur sphérique OAC.

Quant à la tranche A'AMBB', on pourra calculer son volume en prenant la différence de ceux des deux segmens CBB' et CAA'.

PROBLÈME.

786. *Evaluer le volume d'un corps de figure quelconque.*

Le moyen le plus naturel qui se présente pour évaluer le volume d'un corps, c'est de le décomposer en parties dont on puisse calculer immédiatement les volumes. Supposons donc que l'on fasse glisser une ligne droite sur la surface du corps, de manière qu'elle reste perpendiculaire à un plan donné : elle engendrera la surface d'un cylindre dont la base ABCDEF, située sur le plan dont il s'agit, sera la projection du corps sur ce plan. Je divise cette base par deux séries de lignes droites perpendiculaires entre elles et équidistantes les unes des autres, et par chacune je mène un plan perpendiculaire à celui de la base. De cette manière notre corps sera partagé en élémens tels que M'P, que l'on pourra regarder comme la différence de deux troncs mP et mP' de parallélipipèdes rectangles, si les lignes de division de la base sont suffisamment rapprochées. Or le volume de chacun de ces troncs est égal à l'aire A de sa base multipliée par le quart de la somme de ses quatre arètes : d'où l'on conclut facilement, en mettant A en facteur commun, que le volume demandé a pour mesure le produit de l'aire A multipliée par le quart de la somme des arètes de tous les élémens dans lesquels on l'aura décomposé ; et, comme il y aura des arètes qui appartiendront à 1, 2, 3 ou 4 élémens, il s'ensuit que, *pour avoir le volume d'un corps, il faut partager sa projection sur un plan quelconque en rectangles par deux séries de lignes droites d'autant plus rapprochées que l'on voudra plus d'exactitude, puis, ayant élevé des perpendiculaires aux sommets de chacun de ces rectangles, mesurer les parties de ces perpendiculaires interceptées par la surface du corps proposé, enfin multiplier l'aire de l'un des rectangles dans lesquels on aura décomposé la projection du corps, par la somme faite des parties de ces perpendiculaires qui répondent à un sommet commun à quatre rectangles, des trois quarts, de la moitié et du quart de celles qui répondent à un sommet commun à trois, deux ou un de ces rectangles.* Fig. 324.

Dans la marine on a besoin de mesurer le volume de la partie de la carène d'un vaisseau qui est plongée dans l'eau. Alors on prend le plan vertical mené par la quille pour plan de projection, et l'on retombe ainsi sur la règle précédente.

SCHOLIE. Remarquons toutefois que tous les élémens dans lesquels nous avons décomposé notre corps n'ont point pour bases des rectangles, mais seulement des portions de rectangles. On néglige alors ceux qui, *à vue*, paraissent répondre à des bases moindres que la moitié d'un rectangle, et l'on considère les autres comme des élémens entiers.

PROBLÈME.

787. *Evaluer le volume de la tranche qu'on obtient en coupant un corps par deux plans parallèles.*

Partageons l'épaisseur de la tranche en un assez grand nombre de parties égales, menons par tous les points de division des plans parallèles à ses bases, et projetons ensuite *toutes les* tranches élémentaires dans lesquelles nous l'*aurons ainsi dé*composée sur un plan perpendiculaire à tous les plans sécans.

Fig. 525. Soit AB' la projection de l'une de ces tranches partielles. Je divise AB en un grand nombre de parties égales, et par les points de division je mène des plans CC', DD'... perpendiculaires à la droite AB : je partage ainsi la tranche en élémens dont chacun aura pour mesure l'aire de l'un des rectangles élémentaires mutipliée par le quart de la somme de ses quatre arêtes. Ainsi en désignant ces arêtes respectivement par a et a', b et b', c et c'... on aura pour expression du volume v de la tranche AB' :

$$v = AC \cdot CC' \cdot \frac{a + a' + 2c + 2c' + 2d + 2d' + \ldots + b + b'}{4},$$

ou

$$v = CC' \cdot \frac{AC}{2}\left(\frac{a + a' + b + b'}{2} + c + c' + d + d' + \ldots\right).$$

Mais, en désignant par A et par A' les aires des bases de la tranche, on a (440) :

$$A = AC\left(\frac{a+b}{2} + c + d + \ldots\right), \text{ et } A' = AC\left(\frac{a'+b'}{2} + c' + d' + \ldots\right)$$

donc

$$v = \frac{A + A'}{2} \cdot CC'.$$

Ainsi le volume de l'une quelconque des tranches élémentaires est égal à la demi-somme des aires de ses bases multipliées par son épaisseur : d'où l'on conclura facilement, en raisonnant comme au n.° 440, que, *pour évaluer le volume d'une tranche*

quelconque d'un corps, il faut diviser son épaisseur en un assez grand nombre de parties égales, mener par les différens points de division des plans parallèles aux bases, puis ajouter à la demi-somme des aires de ces bases les aires de toutes les sections intermédiaires, et multiplier le résultat par la distance de deux plans sécans consécutifs.

Cette règle convient surtout pour évaluer le volume d'un corps terminé par une surface de révolution : car, en supposant les deux plans limites tangens à la surface aux points mêmes où son axe la perce, les sections sont des cercles, de sorte qu'il est alors facile d'évaluer leurs aires.

PROBLÈME.

788. *Evaluer l'aire d'une surface courbe quelconque.*

Soit ABCDE la projection de cette surface sur un plan quelconque. Si nous opérons comme au n.° 786, nous décomposerons l'aire demandée en quadrilatères curvilignes, que l'on pourra d'autant mieux regarder comme des quadrilatères plans, que les plans sécans seront plus rapprochés les uns des autres. Soit A l'aire de l'un MNPQ de ces petits quadrilatères, et a celle de sa projection $mnpq$. Si nous convenons de désigner par m, n, p, q, les perpendiculaires mm', nn', pp', qq', abaissées des sommets de cette projection sur le plan du quadrilatère PM, et par M, N, P, Q, celles abaissées des sommets de celui-ci sur le plan de projection, nous aurons pour la mesure du volume du tronc de parallélipipède mP la double expression: Fig. 324.

$$a\cdot\frac{M+N+P+Q}{4}\ \text{et}\ A\cdot\frac{m+n+p+q}{4},\ \text{partant}\ A=a\cdot\frac{M+N+P+Q}{m+n+p+q}.$$

Mais les triangles rectangles Mmm', Nnn'..... sont équiangles: car les angles Mmm', Nnn'..... mesurent l'inclinaison du plan du quadrilatère PM sur le plan de projection: donc

$$M:m::N:n::P:p::Q:q;\ \text{d'où}\ \frac{M+N+P+Q}{m+n+p+q}=\frac{M}{m},\ \text{et ainsi}\ A=a\cdot\frac{M}{m}.$$

Donc, en désignant par A', M' et m'; A'', M'' et m''....., les quantités analogues à A, M et m, pour les autres quadrilatères dans lesquels nous avons décomposé la surface à mesurer, nous aurons, pour expression de son aire X:

$$X=a\left(\frac{M}{m}+\frac{M'}{m'}+\frac{M''}{m''}+\ldots\ldots\right);$$

de sorte qu'il ne s'agit plus que de déterminer les perpendiculaires M, M', M''...... et m, m', m''...... Les premières se mesureront immédiatement; quant aux secondes, voici comment on pourra les obtenir : rabattez les faces mN et mQ du tronc
Fig. 526. mP sur le plan de projection, et prolongez les côtés MN et MQ jusqu'à leur intersection, en R et en S, avec les côtés de l'angle nmq. Il est clair qu'en joignant RS, vous aurez la trace du plan du quadrilatère MNPQ sur le plan de projection : par conséquent, si l'on mène mT perpendiculaire sur RS, la perpendiculaire abaissée de m sur l'hypothénuse du triangle rectangle formé en joignant le point T avec le point M de l'espace, sera la droite demandée m. Or le rabattement de ce triangle sur le plan de projection est TmM' : donc celui de la perpendiculaire cherchée m est la ligne mO', qu'il est facile de *mesurer* (*a*).

789. Lorsque le corps dont on demande le volume est d'une forme très-irrégulière, les procédés que nous avons indiqués deviendraient impraticables par leur longueur. On peut alors le placer dans un vase dont on aura préalablement déterminé la capacité; puis, mesurant la quantité d'eau ou de sable fin nécessaire pour achever de remplir le vase, on voit qu'une simple soustraction suffira pour résoudre le problème.

Si le corps à mesurer est d'un petit volume, on le plongera dans un vase rempli d'eau; et, en mesurant en kilogrammes le poids de l'eau qu'il aura chassée du vase, on connaîtra le volume de cette eau, et par conséquent celui du corps en décimètres cubes (Arith., n.° 264). Observons toutefois que, si l'on avait

---

(*a*) Si l'on veut calculer m, on observera que le triangle rectangle M'mT donne $\frac{M}{m} = \frac{M'T}{mT}$: d'où $\frac{M^2}{m^2} = 1 + \frac{M^2}{\overline{mT}^2}$. Mais le triangle mSR donne de même $m\text{T} \cdot \text{SR} = m\text{S} \cdot m\text{R}$: d'où $\frac{1}{\overline{mT}^2} = \frac{\overline{SR}^2}{\overline{mS}^2 \cdot \overline{mR}^2} = \frac{1}{\overline{mR}^2} + \frac{1}{\overline{mS}^2}$: donc $\frac{M^2}{m^2} = 1 + \frac{M^2}{\overline{mR}^2} + \frac{M^2}{\overline{mS}^2}$. Or, en désignant par b et par c les deux côtés du rectangle mp, et par d et e les différences M — N et M — Q, on tire des triangles semblables MNI et MRm, MQK et MmS : $\frac{M}{mR} = \frac{d}{b}$, et $\frac{M}{mS} = \frac{e}{c}$; donc $\frac{M}{m} = \sqrt{1 + \frac{d^2}{b^2} + \frac{e^2}{c^2}}$; par conséquent $A = bc\sqrt{1 + \frac{d^2}{b^2} + \frac{e^2}{c^2}}$. C'est la formule même donnée par *la méthode des quadratures*.

besoin d'une très-grande exactitude, il faudrait avoir égard à la température de cette eau, comme on l'enseigne dans les traités de physique.

On peut encore parvenir à la détermination des volumes des corps au moyen de leurs *poids spécifiques*. *Le* POIDS SPÉCIFIQUE *d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de la substance de ce corps à celui d'un pareil volume d'eau* : d'où l'on voit que, *si l'on multiplie le volume d'un corps évalué en décimètres cubes par son poids spécifique, on aura le poids de ce corps en kilogrammes, et que, par conséquent, en divisant le poids d'un corps par son poids spécifique, on aura son volume en décimètres cubes*. Ces deux règles sont d'une application continuelle dans les arts.

Premier exemple. Veut-on calculer le diamètre intérieur d'un tube de verre : on pèsera ce tube, en prenant le *gramme* pour unité; puis, après y avoir introduit une certaine quantité de mercure, on le pèsera de nouveau. La différence de ces deux poids sera évidemment celui d'une colonne de mercure de même diamètre que le tube : donc, en divisant ce poids par 13,598, poids spécifique du mercure, *on aura le volume de la colonne* en centimètres cubes. Si donc on a mesuré sa longueur, le quotient trouvé en divisant ce volume par cette longueur sera l'aire de la section du tube exprimée en centimètres carrés (763). Il ne s'agira donc plus, pour résoudre le problème, que de diviser cette aire par π, et d'extraire la racine carrée du quotient (432).

Deuxième exemple. La colonne de Sévère, près d'Alexandrie, est formée d'un fût en granit de 30^{m} de haut sur 3 de diamètre, qui repose sur un piédestal cubique de marbre de 5^{m} de côté. Quel est son poids à moins d'un kilogramme?

L'aire de la base est $\frac{\pi}{4}\cdot 9$: donc le volume total du fût est $\left(\frac{\pi}{4}\cdot 9\cdot 30\right)^{m.c}$, et celui du piédestal $125^{m.c}$; or, les poids spécifiques du granit et du marbre étant respectivement 2,716 et 2,960, on voit qu'un mètre cube du premier pèsera $2716^{k.o}$, et qu'un mètre cube du second en pèsera 2960 : donc le poids total de la masse sera $\left(\frac{\pi}{4}\cdot 9\cdot 30\cdot 2716 + 125\cdot 2960\right)^{k.o}$. Or $\frac{9\cdot 30\cdot 2716}{4} = 183330$: donc, pour ne pas commettre une erreur

d'un kilogramme, il faut que la valeur de π ne soit pas fautive d'un millionième. On prendra donc $\pi = 3{,}141593$, et on trouvera pour résultat 945948 kilogrammes.

CHAPITRE VII.

DE LA COMPARAISON DES VOLUMES.

THÉORÈME.

790. *Les volumes de deux pyramides semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues.*

Fig. 298. Puisque les deux pyramides *sabcde* et SABCDE sont semblables, leurs angles *s* et S sont égaux : ainsi on pourra placer la première dans la seconde, de manière que les arêtes homologues de ces deux angles coïncident. De cette manière, la base *abcde* se trouvera en A'B'C'D'E' parallèlement à la base ABCDE : donc la hauteur SO sera coupée en parties proportionnelles à SA et à SA', et par conséquent à AB et à A'B' ; de sorte qu'on aura :

$$SO : SO' \text{ ou } so :: AB : A'B' \text{ ou } ab.$$

Mais la similitude des bases des deux pyramides donne aussi :

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, puis divisant les deux termes du premier rapport par 3, il viendra enfin :

$$ABCDE \cdot \tfrac{1}{3} SO : abcde \cdot \tfrac{1}{3} so :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3,$$

ce qui démontre notre théorème (768).

THÉORÈME.

791. *Les volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues.*

En effet nous pourrons partager les deux polyèdres en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, et semblablement disposées ; puis former autant de proportions, en exprimant que *chacune des pyramides du premier polyèdre* EST *à celle qui lui correspond dans le second,* COMME *le cube d'une de ses arêtes* EST *au cube de l'arête homologue de l'autre pyramide.* Mais, les polyèdres étant semblables,

leurs arêtes et leurs diagonales homologues, et partant les cubes de ces arètes et de ces diagonales, sont proportionnels: donc les seconds rapports de toutes nos proportions sont égaux, car ce sont des rapports de cubes d'arètes ou de diagonales homologues des deux polyèdres. Les premiers rapports sont donc aussi égaux, et forment ainsi une suite dont les antécédens sont les pyramides du premier polyèdre, et dont les conséquens sont les pyramides correspondantes du second : donc la somme de tous ces antécédens, etc. (458).

THÉORÈME.

792. *Les volumes de deux corps semblables sont proportionnels aux cubes de leurs rayons vecteurs homologues.*

Répétez ici la démonstration du n.º 746, en remplaçant les triangles dans lesquels vous aurez décomposé les surfaces de ces deux corps, par les tétraèdres auxquels ils servent de bases.

793. COROLLAIRE I. *Les volumes des cônes, des troncs de cône, des cylindres, des secteurs sphériques, des coins, des tranches et des segmens semblables, sont proportionnels aux cubes de leurs lignes homologues.*

Il serait facile de démontrer ces propositions directement, en imitant les démonstrations du chapitre V. Si, par exemple, on considère deux troncs de cône semblables, on désignera par V, R, r et h, le volume, les rayons des bases et la hauteur de l'un, et par les mêmes lettres accentuées les quantités correspondantes du second. On aura alors (774) :

$$V : V' :: (R^2 + r^2 + Rr)\,h : (R'^2 + r'^2 + R'r')\,h' ;$$

Mais $R : R' :: r : r'$. Multipliant cette proportion par $r : r' :: r : r'$, il viendra :

$$Rr : R'r' :: r^2 : r'^2 :: R^2 : R'^2 :: h^2 : h'^2 ;$$

d'où l'on tire (Arith., n.º 221) :

$$Rr + r^2 + R^2 : R'r' + r'^2 + R'^2 :: h^2 : h'^2.$$

Multipliant enfin la première de nos proportions par celle-ci, on trouvera, après avoir simplifié :

$$V : V' :: h^3 : h'^3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

794. COROLLAIRE II. *Deux sphères étant semblables, leurs volumes seront proportionnels aux cubes de leurs rayons.*

Cela résulte d'ailleurs de ce que l'expression du volume d'une sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

PROBLÈME.

795. *Calculer le rapport des volumes du soleil et de la terre.*

Le double de la parallaxe horizontale d'un astre est le diamètre apparent de la terre vue du centre de cet astre (pages *161* et 143) : donc, *en divisant le diamètre apparent d'un astre par le double de sa parallaxe horizontale, on aura le rapport de son diamètre à celui de la terre :* car on conçoit qu'à raison de l'éloignement où nous sommes du soleil et des planètes, les diamètres apparens de ces astres diffèrent très-peu de leurs vrais diamètres. Or on a trouvé que la valeur moyenne du diamètre apparent du soleil est 32',0545=1932'',27; nous avons vu que sa parallaxe horizontale est 8'',6 quand il est à sa distance moyenne de la terre : donc les rayons du soleil et de la terre sont entre eux dans le rapport de 1932,27 à 17,2, ou à peu près *comme* 112 *est à* 1. Donc le rapport de leurs volumes sera $\left(\frac{1932,27}{17,2}\right)^3=1418757$: ainsi *le soleil est environ quatorze cent mille fois plus gros que la terre.*

PROBLÈME.

796. *Décrire une sphère double d'une autre.*

La question revient évidemment à trouver l'arète d'un cube double d'un autre, ce qui ne saurait se faire *exactement* en n'employant que la règle et le compas. Voici toutefois une méthode qui donne, *à moins d'un demi-centième du côté du cube proposé,* celui du cube demandé, ainsi qu'il est facile de le vérifier. Sur une
Fig. 527. droite AR, triple du côté donné OR, décrivez une circonférence, et joignez le point O avec une des extrémités du diamètre BC, perpendiculaire à AR. Le prolongement OX de cette droite sera l'arète du cube double de celui dont OR est le côté.

PROBLÈME.

797. *Quelles dimensions faut-il donner à une feuillette pour qu'elle contienne* 114 *litres ?*

Nous avons vu que le diamètre du fond d'un hectolitre valait $0^m,435$; nous déterminerons donc celui du fond de notre feuillette par la proportion

$$100 : 114 :: (0,435)^3 : r^3 = (0,435)^3 \cdot 1,14;$$

d'où l'on tire : $r = 0{,}435 \cdot \sqrt[3]{1{,}14}$. Si donc nous extrayons la racine cubique de 1,14 à moins d'un millième près, nous aurons la valeur de r à moins d'un demi-millimètre près. On trouvera, en effectuant le calcul : $r = 0^{m},454$; et, en posant ensuite les proportions [774, (a)]

16 : 18 :: 0,454 : $R = 0^{m},511$, et 16 : 21 :: 0,454 : $l = 0^{m},596$, on aura achevé de résoudre le problème.

798. On lit dans la physique de M. Biot que, *si l'on dore un cylindre d'argent pesant* 360° *avec* 6 *onces d'or, on pourra l'étirer en un fil de* 1351900^{P} *de long sur* $\frac{1}{8}$ *de ligne de largeur : quelle est l'épaisseur de la couche d'or?*

Soient AE le parallélipipède rectangle qui représente le fil, L sa longueur AB, l sa largeur AD, et e son épaisseur AC. Lle est donc l'expression de son volume. Or, si l'on admet, avec Réaumur, qu'un pied cube d'or pèse 21220° et un pied cube d'argent 11523°, on verra facilement que 6° d'or et 360° d'argent sont les poids respectifs de $844^{l.c},293$ d'or, et de $93287^{l.c},702$ d'argent, de sorte que $Lle = 94131{,}995$, équation qui détermine e, puisque L et l sont connus. (La ligne est actuellement l'unité linéaire). On trouvera $e = \frac{1}{2383{,}5}$. Fig. 528.

L'épaisseur x de la couche d'or étant partout la même, il suffira, pour en avoir le volume, de multiplier son aire par x. Or celle de la face supérieure est évidemment Ll; celle de la face latérale est $L\,(e-2x)$: car sa hauteur est bf; et, comme le volume de la couche est $844^{l.c},293$, nous aurons l'équation $2\{Ll + L\,(e-2x)\}\,x = 844{,}293$; mais, comme x est une très-petite quantité, puisqu'elle est nécessairement beaucoup moindre que e, nous pourrons négliger son carré, ce qui réduira cette équation à $2L\,(l+e)\,x = 844{,}293$; d'où l'on tire, en opérant toujours par logarithmes, $x = \frac{1}{39421}$.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE.

APPENDICE.

PRÉCIS
DU LEVÉ DES PLANS.

1. LE LEVÉ DES PLANS *est l'art de tracer sur une feuille de papier une figure semblable à celle du terrain, et qui en représente ainsi toutes les parties suivant les rapports de leur étendue et de leur position.*

2. La première chose que doit faire le géomètre chargé de lever un plan, est de parcourir le terrain dans toute son étendue, et d'en tracer à mesure un dessin nommé *croquis*, sur lequel il représentera le mieux possible la position des objets les plus remarquables, tels que les rivières, les chemins, les coteaux, les villages, les maisons isolées, etc., ainsi que les lignes droites ou courbes qui le terminent, et il fera placer des jalons aux extrémités de ces lignes et sur leurs parties les plus concaves et les plus convexes.

3. Cela fait, s'il ne s'agit que de lever le contour rectiligne d'un terrain de peu d'étendue et d'un petit nombre de côtés, on emploiera très-commodément le procédé indiqué au n.° 438, 1.°,
Fig. 222. c'est-à-dire qu'on mesurera les différens côtés AB, BC, CD.... ainsi que les diagonales AC, AD.... qui partagent le polygone en triangles, en ayant soin de tendre la chaîne bien horizontalement (*a*), et l'on cotera sur le croquis la valeur de chacune de

---

(*a*) C'est une précaution qu'il ne faut jamais négliger, à moins d'impossibilité absolue. Ce n'est en effet que la projection horizontale d'un terrain que l'on se propose de lever, parce que, comme on estime la valeur des champs sur la quantité de leurs productions, et que les végétaux, et les arbres surtout, poussent généralement dans une direction verticale, un espace incliné n'en contient pas plus que sa projection horizontale. On pourrait, il est vrai, contester ce principe par rapport aux graminées et aux plantes basses; mais on observera alors que les terrains en pente, retenant moins l'humidité que les autres, sont, toutes choses égales d'ailleurs, moins productifs, et que leur

ces *lignes* sur celle qui la représente. Rien ne sera alors plus facile que de dessiner, à l'échelle convenue, le plan du polygone ABCD...... puisque l'on connaît les longueurs des trois côtés de chacun des triangles dans lesquels on l'a décomposé.

Remarquons toutefois qu'il sera bon, pour se fournir des vérifications, de mesurer quelques diagonales auxiliaires, telles que FB, FC, etc.: car on conçoit que, si deux arcs se coupaient très-obliquement, leur point d'intersection ne serait pas assez bien déterminé.

Si l'on ne pouvait point parcourir librement l'intérieur du polygone, on déterminerait ses angles soit au moyen du graphomètre, soit de la manière suivante, qui est très-simple, mais aussi moins exacte. Joignez deux points a et c pris sur les côtés de l'angle B, et mesurez avec beaucoup de précision Ba, Bc, et ac. La construction du triangle Bac fera connaître l'angle B. Pour déterminer l'angle rentrant F, on prolongera GF, et l'on mesurera les côtés du triangle Feg. On pourra donc rapporter le polygone sur le papier, puisque l'on connaîtra ses angles et ses côtés (a).

La méthode de décomposition en triangles s'applique particulièrement au levé des édifices et des maisons : car il suffit évidemment de lever le plan de chacune de leurs parties, en observant de mesurer l'épaisseur des murs, la largeur des portes et des fenêtres, la largeur et la profondeur des cheminées, et les lignes qui fixent leur position sur le mur où elles se trouvent.

4. Si le terrain présente beaucoup de sinuosités, on aura re-

---

culture est en outre plus difficile, et partant plus dispendieuse. Si donc la pente du terrain à mesurer est un peu forte, et que les triangles ABC, ACD..... soient dans des plans différens, on chaînera les droites AB, AC, AD..... et l'on mesurera avec le graphomètre tous les angles en A, BAC, CAD..... ainsi que les angles ZAB, ZAC, ZAD..... formés par les lignes AB, AC, AD..... avec la verticale AZ, et alors on pourra *réduire à l'horizon* les angles BAC, CAD....(567). Si de plus on observe que la projection horizontale d'une ligne est la base d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse est la ligne projetée, et dont l'angle au sommet est précisément l'inclinaison de cette ligne sur la verticale, on pourra déterminer facilement les projections horizontales des lignes AB, AC, AD...., de sorte que l'on connaîtra, dans chacun des triangles qui forment la projection du polygone ABCD..... deux côtés et l'angle compris. Il sera donc facile de décrire cette projection.

(a) Il ne serait pas nécessaire de déterminer tous les angles et tous les côtés du polygone (262 et 265); mais il vaut mieux le faire : car on se procure ainsi des vérifications.

cours aux méthodes que nous avons données au n.o 438, 2.o *et* 2.e *cas*, et au n.o 442. On observera seulement que, si le périmètre du terrain est formé de lignes courbes, il sera bon de lui inscrire une brisée dont les côtés ne s'éloignent pas beaucoup des arcs correspondans. Ainsi, dans la figure 225, on tirera les droites
Fig. 229. B*f*, GI, NO et OP, ce qui dispensera d'avoir recours à *l'équerre* pour mener les petites perpendiculaires dont on a besoin pour relever les arcs BCQDF, GI, etc.

5. Proposons-nous maintenant de lever un plan d'une grande étendue.

Après avoir fait une reconnaissance exacte du terrain, le géomètre se transporte sur les lieux les plus élevés pour y *déterminer* les objets les plus apparens, auxquels il devra rattacher son travail; il dessine en même temps un canevas sur lequel il représente
Fig. 178. le mieux possible la position de ces points A, B, C..... que l'on nomme *trigonométriques*, et il fait planter solidement à chacun d'eux un *signal* (c'est une perche de 2 à 3 mètres, à l'extrémité de laquelle on attache une botte de paille). Cela fait, on établit sur une surface la plus horizontale qu'il soit possible une base FG, des extrémités de laquelle on apercevra le plus de signaux que l'on pourra (ces extrémités sont fixées invariablement par deux piquets); et, après l'avoir mesurée avec le plus grand soin, à plusieurs reprises, on prendra une moyenne arithmétique entre les résultats que l'on aura trouvés. On placera ensuite le centre d'un graphomètre directement au dessus du point F; et, ayant disposé le cercle bien horizontalement (480), on pointera la lunette fixe sur un jalon planté en G, et l'on fera décrire un tour entier d'horizon à la lunette mobile en visant les signaux dans l'ordre où ils se présentent depuis *zéro* jusqu'à 360°. On connaîtra ainsi les angles formés par la base FG et les rayons visuels menés de F aux signaux que l'on a observés; et l'on vérifiera sur le terrain même l'exactitude de ces mesures en calculant l'angle formé par chaque rayon avec le suivant, et voyant si la somme de ces angles diffère très-peu de 360°. On transportera ensuite le graphomètre au point G pour y recommencer les mêmes opérations; puis, après avoir établi des signaux en F et en G, on ira répéter aux points A, B, C.... les mêmes observations d'angles; et, à mesure que l'on déterminera le troisième angle d'un triangle,

on examinera si la somme des trois angles diffère très-peu de 180° (*a*).

Si un signal M ne pouvait être aperçu en même temps qu'un autre signal des stations où l'on s'est transporté, on irait en ce point mesurer les angles BMC et CMD, et sa position serait ainsi déterminée (157).

Le travail de *la triangulation* étant effectué, on tire sur le papier une droite *fg* qui contienne autant de parties de l'échelle que FG contient d'unités, et, au moyen de la table des cordes, on fait à ses extrémités des angles respectivement égaux à ceux que l'on a mesurés. Puis, sur les côtés des triangles résultans pris pour bases, on construit des triangles équiangles à ceux qui, sur le terrain, s'appuient sur les côtés homologues de ces bases, et l'on parvient ainsi à représenter le réseau de triangles dont on a couvert le sol (*b*). Quand cette opération sera terminée, il faudra procéder au levé des détails.

(*a*) Si le graphomètre ne peut être placé au pied même d'un signal, on n'obtiendra pas directement l'angle dont le sommet est sur ce signal; mais on observera *avec un soin particulier* les deux autres angles du triangle dont celui-là fait partie. On évitera ainsi la *réduction au centre de la station*, sans diminuer l'exactitude des résultats : car il y a telle circonstance qui peut faire qu'un angle réduit au centre soit moins exact que s'il était déduit des valeurs des deux autres mesurés avec précision.

(*b*) Ce n'est pas ainsi que l'on opère réellement dans la construction des plans topographiques : car on sent que les angles qui, par l'intersection de leurs côtés, doivent déterminer les points trigonométriques, ne sont pas décrits avec une exactitude suffisante. On aurait même les trois côtés de chaque triangle, que l'on ne serait guère plus avancé pour la construction de ces triangles, à cause de la difficulté de reconnaître le point de section des arcs (215). Pour éviter ces inconvéniens, on rapporte la position de chacun des points trigonométriques du plan à la *méridienne* de l'un de ces points, de G, par exemple, et à la perpendiculaire menée en ce point sur cette méridienne, c'est-à-dire que l'on *calcule* les distances de chacun de ces points à ces deux lignes. Pour déterminer la position de la méridienne à l'égard de FG, on observera avec une *boussole* (14) l'angle que la direction de l'aiguille aimantée fait avec FG; et, corrigeant cet angle de la *déclinaison* (*), qui est actuellement 22° 4' vers l'*ouest*, on aura l'inclinaison de la méridienne NS sur FG. Ensuite on déduira facilement de cette inclinaison l'angle que fait chaque côté avec la méridienne. Si l'on imagine par le point A, par exemple, une parallèle AS' à GS, et qu'on ajoute l'angle observé GAB à l'angle connu GAS' = NGF — AGF, on aura l'inclinaison BAS' du côté BA sur NS. Veut-on maintenant avoir les distances d'un point trigonométrique quel-

(*) C'est l'angle que cette aiguille fait avec le méridien du lieu.

Fig. 541. 6. Considérons le canton compris entre les points trigonométriques A, B, C, D (*a*). On chaînera d'abord les lignes AB, BC, CA; AD et DC; et, comme leurs longueurs sont connues par ce qui précède, on verra de suite si les mesures sont bien ou mal prises. En chaînant ces grandes lignes, on notera *les divisions* de toutes les parcelles, et l'on enfoncera en outre de petits piquets dans tous les endroits que l'on jugera propres à devenir des points de départ pour d'autres lignes d'opérations. Ainsi on arrêtera les points E, H, N, O, P, Q, R, T, U, V, où aboutissent des lignes qui limitent des masses de parcelles de terres labourées dans le même sens, ainsi que les points F, G, I, K, L, M, S, X, où les côtés trigonométriques sont coupés par des chemins. On ne négligera non plus aucun des objets remarquables *qui sont* près de ces côtés. Ainsi une cheminée, l'angle d'*une maison, un* arbre facile à reconnaître de loin, s'ils sont rattachés convenablement à une de ces lignes au moyen d'un coup d'équerre, alors qu'on en effectuera la mesure, deviendront eux-mêmes de nouveaux points que l'on appelle *secondaires,* aussi exacts que ceux qui sont déja compris dans le canevas, si les côtés dont ils dérivent ont été exactement mesurés, et cadrent avec les longueurs données par le calcul.

On voit déja que les parcelles qui sont traversées par deux côtés trigonométriques seront bientôt déterminées : car, en prenant sur les droites AB et AC du plan des longueurs égales aux

---

conque A à la méridienne et à sa perpendiculaire, on abaissera AI perpendiculaire sur NS; et, comme on aura préalablement calculé, par les méthodes qu'enseigne la *trigonométrie*, le côté GA, on pourra calculer aussi les deux distances AI et IG à la méridienne et à la perpendiculaire, puisque l'on connaît dans le triangle rectangle AIG l'hypothénuse et l'angle AGN, et qu'ainsi ce triangle est déterminé. Cela fait, on tracera sur le plan les deux droites NS et Oε à angles droits, pour représenter la méridienne et sa perpendiculaire; puis on partagera la feuille de dessin en carrés de 500^{m}, si le *plan est* à l'échelle de 1 à 2500, par des parallèles à ces lignes, et alors il sera facile de placer chaque point trigonométrique dans sa véritable position : *car*, si un point est, par exemple, à 1240^{m} (O) de la méridienne, et à 850 (*N*) de la perpendiculaire, on saura immédiatement dans quel carré il se trouve, et qu'il est à 240^{m} du côté *est* de ce carré, et à 350 de son côté *sud*. Quand tous les points seront ainsi placés, on vérifiera l'opération par la longueur des côtés trigonométriques qui ont servi à les déterminer.

(*a*) La méthode que nous allons indiquer est due à M. *Busset*, géomètre en chef du cadastre, qui l'a publiée à Clermont-Ferrand dans un ouvrage très-remarquable intitulé : TRAITÉ PRATIQUE DE LA PARTIE D'ART DU CADASTRE.

distances trouvées Aa' et Ab', Ac' et Ad', par exemple, on aura deux points de chacune des droites ab et cd (les bords des parcelles sont ordinairement des lignes droites), ce qui donne leur direction; d'ailleurs elles aboutissent sur la ligne QP, que l'on peut tirer sur le plan (a), et l'on aura pu mesurer en outre $a'a$ et $c'c$.

Il suit de là que, si l'on tire sur le plan les droites homologues de celles qui joignent deux à deux les points E, F, G, H...., où l'on a enfoncé des piquets, on pourra, en les regardant comme de nouveaux côtés trigonométriques, déterminer les parcelles qu'elles traverseront. Mais il ne sera pas nécessaire de tracer toutes ces lignes : c'est à l'intelligence du géomètre de reconnaître celles qui le conduiront plus rapidement à son but. Ainsi il tirera, par exemple, la droite RN, dont le mesurage lui servira à fixer les points e et f, ainsi que les parcelles qui aboutissent sur cette ligne; et, comme les autres extrémités de ces parcelles seront fixées en chaînant LS, tout le canton SRNMh sera levé. Si en outre on mesure Pi, il n'y aura plus qu'à tirer sur le plan ei et fO pour avoir le plan de la pièce fi. Or, en allant mesurer Pi, on chaînera ei, en notant les divisions des parcelles qui aboutissent sur cette ligne, ce qui achèvera d'en déterminer les limites.

Observons qu'en mesurant les lignes qui joignent les points qu'on aura marqués sur les côtés trigonométriques, on devra arrêter de nouveaux points qui deviendront l'origine de nouvelles lignes sur lesquelles on continuera d'établir les détails du plan. Ainsi le point Y de la droite FH, qui se trouve à peu près dans le prolongement de deux chemins, ne devra pas être négligé; puis, en tirant YM sur le plan, et mesurant son homologue sur le terrain, on arrêtera les points k et l, dont l'un achèvera de déterminer le réage Hk, et dont l'autre, étant joint au point m, que l'on obtiendra en chaînant fg, fera connaître la limite nord des parcelles comprises entre fg et Ml, et ainsi de suite.

En partant du piquet T laissé sur AD, on dirigera une ligne droite sur le peuplier Z, que l'on a rattaché à CA en mesurant cette ligne; mais on ne chaînera pas au delà du point q : car le

(a) Il n'y aura qu'à porter 441 parties de l'échelle sur CA, à partir de C, pour avoir le point P, et 66 sur AD de A en Q, puis joindre QP.

reste de cette ligne est inutile au parcellaire. En mesurant nU, le géomètre y arrêtera un point r tel que le rayon visuel rZ passe le plus près possible de la ligne sinueuse qui se termine en s; et, comme la ligne Sh a déja été mesurée, il sera facile de dresser le plan du canton SV.

N'oublions pas que tout alignement devra être *déterminé* par deux points aussi éloignés que possible, et qu'on ne devra prendre pour lignes de construction que celles qui ne couperont pas les parcelles trop obliquement.

Quant aux sinuosités des chemins, quelques-unes seront déterminées par le tracé même des parcelles, et l'on déterminera les autres par des perpendiculaires élevées sur les lignes de construction qui en approchent le plus.

7. Lorsque le géomètre aura terminé son travail *sur le terrain*, il s'occupera de le rapporter sur le papier. Pour cela il placera d'abord les signaux A, B, C, D, d'après le résultat de la triangulation; puis, après avoir marqué sur les lignes qui les unissent les points E, F, G, H.... il tirera les lignes de construction FH, LI, LS.... qui en dérivent, ainsi que celles qui, comme TZ, les joignent à des points secondaires, et il aura soin de mesurer ces lignes à l'échelle, et de voir si les longueurs ainsi trouvées s'accordent avec celles qu'il a prises sur le terrain. Ce n'est qu'après avoir fait ces vérifications qu'il rapportera les détails sur le plan, en suivant la marche que nous avons tracée. Seulement, au lieu de faire usage du compas et de l'échelle que nous avons décrite (357), il sera bien plus expéditif, et même plus précis, comme l'indique M. *Busset*, de se servir de la règle de Kutsch : car on sent qu'un mètre étant représenté par $0^{mm},4$ dans les plans construits à l'échelle de 1 à 2500, il sera difficile de faire une erreur appréciable sur la grandeur qui devra représenter quelques décimètres. D'ailleurs l'œil parvient bientôt à distinguer des dixièmes de millimètre, et il est facile de les marquer sur le plan avec une aiguille bien fine, et en appliquant le biseau de la règle sur la ligne à mesurer.

8. Quand le plan sera construit, on procèdera à l'évaluation des aires des parcelles, en opérant sur le plan de chacune d'après les méthodes que nous avons exposées dans le chap. V de la seconde partie. On pourra même transformer chaque parcelle en un triangle équivalent que l'on mesurera ensuite au compas.

9. Si le terrain dont on veut faire le plan n'était pas beaucoup étendu, et qu'il ne s'y trouvât aucun point trigonométrique sur lequel on pût appuyer son travail, on emploierait encore utilement *la méthode de levé par direction*. Supposons qu'il s'agisse du canton *t* F Y *h* S : on mesurera avec le plus grand soin une ligne qui traverse le terrain entièrement ou presque entièrement, par exemple la droite A'B' qui joint l'ormeau A' avec l'angle nord de la maison B'. Ensuite, avec l'équerre d'arpenteur, on rattachera à cette ligne le plus d'objets remarquables que l'on pourra, ou les points que l'on jugera les plus propres à fournir des lignes de construction; puis, les regardant comme des points trigonométriques, on opèrera comme précédemment (6).

10. Remarquons que le système de deux droites pourrait servir à la rigueur pour déterminer toutes les lignes droites qui limitent les parcelles : car ces lignes, prolongées suffisamment, les couperont toujours; mais, outre que l'on doit éviter les intersections faites trop obliquement, il convient de n'employer les prolongemens qu'avec beaucoup de réserve (72).

11. On pourrait, dans le cas actuel, lever très-rapidement le plan que l'on désire au moyen de la *planchette*. La planchette n'est autre chose qu'une petite table carrée de 40 à 50^{cm} de côté, mobile dans tous les sens sur un plateau, porté par un genou que soutient un pied à trois branches. Le géomètre qui veut faire un levé à la planchette doit être muni d'une feuille de papier qu'il tend sur la table (pour mieux conserver cette feuille de papier on est dans l'usage de la coller sur de la mousseline), d'un crayon, d'un compas, d'une échelle et d'une alidade à pinnules très-longues, ou mieux à lunette plongeante. Cette lunette est portée sur une petite colonne de cuivre fixée à une règle de même métal, et son axe optique décrit un plan parallèle à l'arête de cette règle.

Après avoir tracé une brisée qui suive à peu près les sinuosités du contour *t*FY*h*S, on placera la planchette horizontalement en S, et l'on marquera sur le papier un point S' qui corresponde bien à S. On emploie pour cela un compas à pointes recourbées, dont les branches sont assez longues pour atteindre au centre de la planchette. A la pointe inférieure est suspendu un fil à plomb; et, lorsqu'il répond juste au point S, l'autre branche marque

exactement le point S'. Au reste un peu d'habitude supplée très bien à cet instrument. Cela fait, on pique une aiguille verticalement au point S', et, appuyant l'alidade sur cette aiguille, on la pointe sur un jalon planté en *t*. Alors on tire au crayon une ligne indéfinie le long de la règle et du côté de l'aiguille; puis on fait chaîner S*t*, ainsi que les petites perpendiculaires que l'on juge nécessaires pour relever le chemin qui longe cette ligne, en ayant soin d'ailleurs d'arrêter en même temps toutes les divisions des parcelles que S*t* traverse, et l'on rapporte immédiatement toutes ces mesures sur le papier, ce qui donne le tracé du chemin qui limite notre canton à l'ouest.

On va ensuite s'établir en *t*, en ayant soin de placer le *point t'* bien verticalement au dessus de *t*. On *oriente la planchette*, c'est-à-dire qu'on la fait tourner jusqu'à ce que l'alidade placée le long de S'*t'* se trouve pointée sur le jalon qu'on a laissé en S. Cela fait, pour relever l'angle S*t*F, on fera tourner l'alidade autour de l'aiguille *t'* jusqu'à ce que le rayon visuel passe par F, et l'on opère alors sur *t*F comme on a fait sur S*t*, et ainsi de suite. Arrivé en *h*, on y aura une preuve de l'exactitude de l'opération si le polygone se *ferme* bien, c'est-à-dire si, après avoir dirigé *h'*M' sur *h*M, le rayon visuel *h'*S' coïncide exactement avec l'alignement *h*S.

Comme il est important de vérifier fréquemment son travail, on aura eu soin, pendant que l'on était en S, de diriger l'alidade sur un objet remarquable, tel que l'arbre isolé A', et de le représenter sur le plan, en répétant la même observation au point *t*; alors, quand on sera en Y, par exemple, et que l'on aura orienté la planchette, on mettra l'alidade sur *a'*Y', et le rayon visuel devra aller passer par A'.

Le géomètre, après s'être assuré que son polygone ferme bien, se transportera en R pour y relever l'angle *f*RS, et y mesurer R*f*, en ayant soin d'arrêter en même temps aux divisions des parcelles qui aboutissent sur cette ligne, et il ira ensuite faire les mêmes opérations au point Q et sur Q*g*; et, si en outre il a mesuré les divisions de *ei*, il se trouvera avoir déja dessiné tout le canton S*tuvgfx*. Il chaînera ensuite *vy* pour déterminer le point *y'* homologue de *y*; et, en mesurant les divisions de *yz*, il pourra dessiner le plan de *uz*. Pour vérifier ses opérations, il placera le point *z'* directement au dessus de *z*; et en orientant la planchette sur A', il verra si l'alidade dirigée par le point *z*

et par le point M', par exemple, répondra au jalon M. Sans déranger la planchette, il relèvera les droites zD' et zE', et il n'aura plus que quelques mesures à prendre avec la chaîne pour terminer son plan.

12. Il y a une seconde manière de lever à la planchette, qui ne s'emploie guère que quand une seule base est accessible. Elle consiste à relever tous les angles que forment avec cette base, que nous supposerons être S*t*, les rayons visuels dirigés de ses deux extrémités à tous les points qui forment les sommets des différentes parties, telles que *tv*, *vz*, *zu*, D'E'....., dans lesquelles on peut regarder le terrain comme décomposé (342); mais on sent que ces sommets seront d'autant moins bien déterminés que les lignes qui les donnent par leur intersection se couperont plus obliquement.

Au reste cette seconde méthode est très-commode pour dessiner le canevas d'un plan, lorsque ce plan doit embrasser une grande étendue de terrain; elle est même la seule que l'on puisse employer avec sécurité dans les rochers escarpés et dans les lieux très-inclinés. On peut encore l'appliquer très-utilement à la détermination des points secondaires. Pour cela on se transporte avec une planchette sur trois ou quatre des signaux qui sont sur une même feuille du plan, en évitant toujours les intersections trop obliques.

13. La planchette présente cet avantage précieux, que le géomètre qui l'emploie voit l'image fidèle des lieux se dérouler successivement sous ses yeux à mesure qu'il avance, image dont il peut à chaque instant vérifier l'exactitude, et qu'en rapportant ainsi tous les détails du dessin à la vue même des objets, le terrain sera certainement mieux figuré que quand on se borne à coter les mesures sur un registre, pour exécuter ensuite le plan dans le cabinet. Néanmoins les variations du papier, occasionées par les influences hygrométriques de l'air, la difficulté de maintenir la planchette dans une position invariable par le vent, l'impossibilité de travailler par la pluie, même la plus légère, doivent lui faire préférer la *méthode d'arpentage par direction*.

14. On peut encore parvenir à lever les détails d'un plan avec la *boussole*, et cet instrument devrait même être préféré à tout autre, à cause de la promptitude avec laquelle il permet d'opérer, sans les brusques variations auxquelles l'aiguille aimantée est

exposée (*a*). Toutefois on l'emploie avec avantage pour relever les sinuosités d'une route ou d'une rivière, les contours des petites propriétés, les îles de maisons, pour tracer des routes dans une forêt, etc.

Fig. 550. La boussole se compose d'une aiguille aimantée posée en équilibre sur un pivot extrêmement aigu, et renfermée dans une boîte carrée de 2 à 3 décimètres de côté, ainsi qu'un cercle de métal divisé en 360°, de manière que la ligne 0—180° soit parallèle à un des côtés de la boîte. Ce côté porte une alidade à *visière*, ou mieux à lunette, dont l'axe se meut dans un plan qui lui est parallèle. La boussole peut tourner sur un pied à trois branches, comme la planchette.

Supposons que l'on veuille dessiner le cours d'une rivière. On
Fig. 551. commencera par planter des jalons A, C, E, G, I, aux points qu'on jugera les plus convenables pour former une brisée qui suive à peu près les sinuosités de la rivière. On placera ensuite la boussole horizontalement en A; et, en dirigeant la visière sur le jalon C, on lira le nombre de degrés indiqués par la pointe *bleue* de l'aiguille, et on l'écrira sur le croquis, dans l'angle que forme avec AC une petite ligne que l'on aura tirée pour représenter cette aiguille. On chaînera AC, et, chemin faisant, on mesurera les petites perpendiculaires élevées sur cette droite pour déterminer la sinuosité AMB. On arrêtera d'ailleurs au point B où AC rase le bord de la rivière. On répètera successivement les mêmes opérations aux points C, E, G.... et sur les lignes CE, EG, GI... (pour éviter les erreurs, il faut pointer constamment du même côté, c'est-à-dire amener toujours l'alidade à sa droite ou à sa gauche, et lire ainsi les angles consécutivement depuis zéro jusqu'à 360°) et l'on sera en état de tracer le cours de la rivière (*b*),

(*a*) Cette aiguille ne se dirige pas vers le nord, comme on le dit ordinairement; mais elle prend une position qui reste à fort peu près la même, dans le même lieu, pendant un intervalle de temps assez court, quelques mois, par exemple. L'angle que la direction de l'aiguille aimantée fait avec la méridienne se nomme la *déclinaison*. L'annuaire du bureau des longitudes donne cet angle chaque année. Il est actuellement de 22° 4' en allant vers l'ouest. L'approche des corps ferrugineux déviant l'aiguille de sa direction, il faut avoir soin, quand on approche de la boussole, d'éloigner tout ce qu'on pourrait avoir de fer sur soi.

(*b*) Remarquons que l'angle ECC' est la différence des angles observés NAC et NCE, et qu'ainsi l'angle ACE est le supplément de cette différence.

et de le rattacher au reste du plan, si, ayant placé la boussole successivement aux deux points P et Q déja fixés sur le plan par un travail préliminaire, on a mesuré les angles formés par l'aiguille aimantée et les rayons visuels AP et AQ, ainsi que l'angle NPQ. Pour cela on fera au point p du plan deux angles respectivement égaux à NPQ et à NPA, et les droites np et pa représenteront les directions de l'aiguille aimantée et du rayon visuel PA. On mènera au point q une parallèle à pn; et, en faisant l'angle nqa = NQA, on déterminera le point a homologue de A. On mènera en ce point une parallèle à pn; on fera l'angle nac = NAC; on donnera à ac autant de parties de l'échelle qu'on a trouvé de mètres dans AC; puis, en répétant successivement aux points c, e, g..... les mêmes constructions qu'au point a, on décrira la brisée $acegi$.... semblable à ACEGI... (335). Il sera alors facile d'établir sur ses côtés le dessin des sinuosités de la rivière (442).

Si la largeur de la rivière varie sensiblement, il n'y aura qu'à diriger sur plusieurs points de la rive opposée deux rayons visuels, et ces points seront déterminés.

L'impossibilité d'adapter un vernier à la boussole, jointe aux variations régulières et accidentelles de l'aiguille aimantée, fait qu'on ne peut s'en servir que pour relever des brisées dont les côtés sont peu longs: car alors l'erreur commise sur la direction de ces côtés est peu sensible.

15. Nous avons donné le moyen de tracer une figure égale ou semblable à une autre, et qui, dans ce cas, ait avec elle un rapport donné: ainsi nous pourrions renvoyer aux n.os 267, 326, 355, 442 et 470, le lecteur qui voudrait copier ou réduire un plan; toutefois nous ferons quelques remarques qui donnent les moyens d'arriver plus rapidement au but. Ainsi, pour copier un dessin, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de le calquer à la vitre ou au moyen du poncif, si la chose est possible.

Si les dimensions de la copie doivent être à celles de l'original dans le rapport de m à n, on aura recours à la méthode des carreaux, c'est-à-dire qu'après avoir couvert le plan de petits carrés (pag. 106), on construira, sur la feuille de papier qui doit recevoir la copie, un rectangle dont les côtés soient à ceux du premier :: m : n; on le divisera en carrés comme le premier, et il ne s'agira plus que de figurer dans chacun de ces carrés les

points qui se trouvent dans les carrés correspondans de l'original.
Fig. 332. Pour cela on amènera le pivot d'un *compas de réduction* (*a*) à diviser les branches AA' et BB', de manière que OA : OA' : : *m* : *n*; puis on agira comme à la page citée, en opérant sur le plan avec les pointes A' et B', et sur la copie avec les pointes A et B.

Fig. 333. A défaut de ce compas, on peut faire usage du *compas de proportion*. On appelle ainsi un instrument formé de deux règles qui peuvent tourner autour d'un pivot O. Sur chacune sont tracées deux lignes divisées en 200 parties égales à partir de O, et qu'on appelle en conséquence *lignes des parties égales*. On conçoit alors que, si l'on écarte les deux règles de telle sorte que la distance des points numérotés *n* soit égale à une ligne du plan, la distance des points numérotés *m* sera précisément à la première : : *m* : *n* (352), et qu'ainsi elle sera la ligne homologue de celle-ci (*b*).

DU NIVELLEMENT.

16. *Le* NIVELLEMENT *est l'opération par laquelle on détermine de combien deux points sont plus ou moins élevés l'un que l'autre par rapport au centre de la terre.* Cette opération exige l'emploi d'un instrument qu'on appelle un *niveau*. Il y en a de deux sortes : *le niveau d'eau*, et *le niveau à bulle d'air*. Nous ne décrirons ici que le premier, quoique le second lui soit de beaucoup préférable.

17. Le niveau d'eau est composé d'un cylindre de fer-blanc
Fig. 334. ABCD de 1^m^,5 à 2^m^ de longueur de B en C, recourbé à angles droits en ces points. On adapte aux parties BA et CD deux verres à boire en beau cristal, parfaitement cylindriques, et percés par le fond. Ces deux verres sont fermés par des couvercles en

---

(*a*) Il est formé de deux branches égales AA' et BB' terminées en pointes, que l'on fait croiser à tel point O que l'on veut, au moyen de divisions tracées sur ces deux branches, et de rainures pratiquées dans l'épaisseur de chacune d'elles. OA et OB restant égales entre elles, ainsi que OA' et OB', on voit que AB : A'B' :: OA : OA'.

(*b*) On trouve encore sur le compas de proportion différentes lignes qui servent à résoudre les problèmes des n.os 159 et 588; celui du n.o 469 et son analogue pour les polyèdres; enfin à trouver le diamètre d'un globe fait d'un métal donné, connaissant celui d'un globe formé d'un autre métal. Mais les résultats sont si peu exacts, que nous renverrons à l'*Encyclopédie méthodique* les personnes curieuses de connaître tous les usages du compas de proportion.

métal semblables à ceux de nos tabatières, et doublés de peau. Ils sont percés d'un trou que l'on peut fermer avec un bouchon. De plus chaque verre est maintenu entre deux plaques de métal noircies, et égales chacune en largeur au quart de sa circonférence. L'instrument peut tourner sur un plateau fixé à une tige terminée par une sphère, qui s'emboîte dans le genou d'un pied semblable à celui du graphomètre.

On remplit d'eau en partie l'appareil EBCF, et l'on obtient ainsi deux véritables surfaces de niveau E et F, qui tranchent parfaitement sur l'atmosphère pendant le jour : car cette eau, étant vue latéralement, paraît très-noire, quelque limpide qu'elle soit d'ailleurs, grace aux plaques noircies qui maintiennent les deux verres. Si donc on place l'œil dans le plan des deux surfaces E et F à une certaine distance, comme 5, 6, 7..... et même 20 décimètres du tube, suivant la nature de sa vue, on donnera au rayon visuel une *direction parfaitement horizontale*.

18. Remarquons que les points de ce rayon visuel AC, parallèle à la tangente TO à la surface terrestre, ne sont pas de niveau entre eux : aussi appelle-t-on ces lignes AC et TO des *lignes de niveau apparent*, parce qu'il semble, à la simple vue, que tous leurs points soient de niveau, tandis qu'ils ne le sont pas. Au contraire, l'arc *td*, concentrique à TD, est une *ligne de niveau vrai*. Ainsi le niveau apparent d'un point surpasse son niveau vrai. Le raisonnement du n.° 295 nous apprend que leur différence $OD = \frac{\overline{OT}^2}{BD}$, et qu'ainsi *elle est égale au carré de la distance des deux points à niveler, mesurée à la surface de la terre, divisé par le diamètre du globe*. Fig. 535.

19. Supposons maintenant que l'on veuille calculer la différence de niveau des deux points A et B donnés sur le terrain, et visibles l'un de l'autre. On posera le niveau au point A, bien horizontalement, dans la direction du point B, où l'on aura planté un jalon. Le niveleur placera alors son œil en O, de manière à diriger son rayon visuel en *b*, et il fera mesurer la hauteur B*b*, ainsi que celle de ce rayon au dessus de A. Supposons que l'on ait trouvé les nombres respectifs $1^m,208$ et $1^m,585$: on voit d'abord que le point B est élevé de $1^m,585 - 1^m,208 = 0^m,377$, au dessus du plan horizontal mené par le point A. Telle est la diffé- Fig. 536.

rence de niveau apparent des deux points A et B. Pour avoir la différence de niveau vrai de ces deux points, on chaînera la distance AB des deux termes du nivellement. Je la suppose de 100^m: on divisera le carré de 100 par le diamètre de la terre 12732396, et le quotient $0,^m000785398$ ou $0^m,0008$ environ, exprime l'élévation du niveau apparent du point A au dessus de son niveau vrai : donc la différence de niveau vrai des deux points A et B est $0^m,377 + 0^m,0008 = 0^m,3778$, c'est-à-dire que le point B est de cette quantité plus loin du centre de la terre que le point A. Cette différence eût été au contraire $0^m,377 - 0^m,0008$, si l'on avait trouvé $1^m,585$ et $1^m,208$ pour les cotes respectives des points A et B.

Si l'on observe qu'en vertu du principe du n.° 18 *les différentes hauteurs du niveau apparent au dessus du niveau vrai sont proportionnelles aux carrés des distances correspondantes*, on voit que l'on aura désormais l'excès du niveau apparent au dessus du niveau vrai en multipliant $\frac{0^m,000785398}{10000} = 0^m,0000000785398$ par le carré de la distance des deux points à niveler, et qu'on pourra même éviter ce calcul en construisant une table qui donne ces excès de 10^m en 10^m, par exemple.

20. Lorsqu'on pourra placer le niveau à égale distance des deux points à niveler, quand même il ne serait pas sur la droite qui les unit, on n'aura pas besoin d'avoir égard à la différence du niveau apparent au niveau vrai : car la correction sera évidem-
Fig. 355. ment la même, puisque, les triangles rectangles C*t*E et A*t*E étant égaux (199), les points A et C sont équidistans du centre de la terre.

Cette méthode a encore l'avantage de permettre de niveler un espace double, partant de diminuer le nombre des coups de niveau, et ainsi les causes d'erreur.

21. On emploie, pour mesurer les hauteurs du rayon visuel au dessus des points que l'on veut niveler, un instrument nommé *mire*, et qui est très-commode. La mire est composée d'une pièce de bois de sapin bien sec, de 2^m de hauteur, dont le plan est
Fig. 357. ABCD. On y pratique une rainure dans laquelle glisse à volonté une languette GK à laquelle on donne aussi 2^m de longueur. Sur un bracelet en fer qui embrasse le montant ABCD, et est fixé à la languette, on attache un rectangle de tôle IK de $20^{c.m}$ de

hauteur, dont l'arète supérieure répond à l'extrémité de la languette. Ce rectangle, nommé le *voyant*, est divisé par la droite LM en deux autres, l'un noir LK, et l'autre blanc IM. Ce voyant est tourné du côté du niveleur, et les divisions de la règle du côté opposé.

La languette est divisée en demi-centimètres numérotés comme on le voit sur la figure. Il en résulte que, si l'extrémité inférieure de la languette est sur AB, l'arète supérieure du voyant répondra à DC, et *la ligne de visée* LM sera à 190$^{c.m}$ au dessus de AB; que par conséquent, si l'on fait monter la languette de 10, 20, 30, 40..... centimètres, ce qui fera correspondre les numéros 190, 200, 210, 220...... à la tête CD de la mire, ces numéros indiqueront, à dix centimètres près, l'élévation de la ligne LM au dessus du pied AB. Ainsi, *en ajoutant dix centimètres au nombre indiqué par la tête de la mire sur la languette, on aura la hauteur de la ligne de visée au dessus de son pied.* Si la tête de la mire est placée entre deux divisions consécutives de la languette, on évaluera le nombre de millimètres complémentaire avec un double décimètre.

Si la ligne de visée est à moins de 190$^{c.m}$ au dessus du sol, on renversera la mire de haut en bas, et l'on suivra encore la même règle.

Enfin l'on a adapté à la languette une vis *v* au moyen de laquelle on peut la fixer lorsque la ligne de visée est à l'extrémité du rayon visuel du niveleur.

22. On peut, avec le niveau perfectionné comme nous l'avons indiqué, et en se servant, si l'on n'a pas la vue bien longue, d'une lunette d'approche qu'on appuie sur un bâton pour la rendre bien stable, faire des stations de 3 à 400^{m} de long, en plaçant toutefois cet instrument au milieu de la distance des deux points à niveler.

DU NIVELLEMENT SIMPLE.

23. Je suppose que l'on veuille déterminer la différence de niveau des deux points A et B. Si ces deux points ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre, et que le relief du terrain le permette, on placera le niveau à peu près à égale distance de A et de B; puis on fera placer la mire verticalement au point A, et, à l'aide de signes convenus avec le porte-mire, on lui fera monter Fig. 338.

ou descendre le voyant jusqu'à ce que le rayon visuel passe exactement par son milieu. Alors il lira la hauteur ou la cote *Aa* du point A, et l'écrira sur le brouillon du nivellement. On répètera ensuite les mêmes opérations au point B; et, si l'on a trouvé que les cotes des points A et B sont respectivement $1^m,648$ et $1^m,400$, on en conclura que le second point est plus élevé que le premier de $1^m,648 - 1^m,400 = 0^m,248$.

Le coup de niveau qui a donné la cote du point A, et même cette cote, se nomme *coup-arrière;* et celui qui a donné la cote du point B, et même cette cote, s'appelle *coup-avant*, parce qu'on suppose que le niveleur se dirige de A vers B.

Cette opération s'appelle un *nivellement simple*, parce que nous n'avons point été obligés de changer le niveau de *place*. Dans le cas contraire on lui donne le nom de *nivellement composé*.

DU NIVELLEMENT COMPOSÉ.

24. Supposons que l'on veuille assigner la différence de niveau
Fig. 559. des deux points A et B placés à une si grande distance l'un de l'autre, ou disposés de telle manière qu'on ne puisse faire cette opération d'un seul coup de niveau.

Si l'on a seulement pour objet de connaître la différence de niveau des deux points A et B, on dirige de la manière la plus commode la ligne ACD..... B que l'on doit suivre, et les cotes verticales de ses sommets A, C, D..... B sont alors les seules choses qu'il importe de connaître. Mais, si la direction de la ligne de nivellement est commandée par la nature de quelques travaux subséquens, on commencera par relever cette ligne en mesurant les projections horizontales de ses angles et de ses côtés, et l'on en tracera la direction par des piquets enfoncés à fleur de terre. Cela fait, je tire sur une feuille de papier une ligne horizontale *ab;* je mesure la distance du point A au point C, et j'écris cette distance comme on le voit sur *ab;* je détermine ensuite, comme on l'a fait dans la pratique du nivellement simple, les cotes des points A et C, et je les écris perpendiculairement à *ab*. Puis j'opère de même entre les points successifs C et D, D et E, etc., et je parviens de cette manière à former la minute représentée dans la figure.

Si le niveau n'avait pas pu être placé à égale distance des

points C et D, par exemple; s'il l'avait été à 40^m de C et à 90 de D, on aurait écrit 40 à la gauche de e sur ab, on aurait fait ensuite une petite croix sur cette ligne, et l'on aurait écrit le nombre 90 à sa suite; et, si l'instrument avait été placé au point C lui-même, on l'aurait indiqué en mettant une croix sur Cc. Dans les deux cas on devra avoir égard à la différence du niveau apparent au niveau vrai.

Maintenant, pour déterminer la différence de niveau des deux points extrêmes A et B, on n'aura qu'à prendre la différence entre la somme des quantités dont il faut s'élever et la somme des quantités dont il faut descendre pour aller de l'un à l'autre; et, comme on calcule la hauteur dont on doit monter ou descendre pour aller d'un point D à un autre E, en prenant la différence entre le coup-arrière donné sur le premier et le coup-avant donné sur le second, on en conclut que, *si l'on prend la différence entre la somme des coups-arrière et celle des coups-avant, on aura la quantité dont le deuxième terme du nivellement est plus haut ou plus bas que le premier, selon que la somme des coups-arrière sera plus grande ou plus petite que celle des coups-avant.*

25. Les doubles cotes qui accompagnent chaque verticale Cc, Dd..... nous indiquent, ainsi que le montre la figure, que les points C, D..... sont comparés à diverses horizontales; mais il est evident que, s'ils l'étaient à une seule, la différence de hauteur de deux points *quelconques* serait la différence même de leurs distances à cette ligne. Pour ramener le nivellement à cet état, on prend une cote d'emprunt AA' dont la hauteur excède le point le plus élevé du profil, et on la substitue à la première Aa. Dans notre exemple il suffit de faire $AA' = 4^m$. J'augmente donc la cote du point A de $4^m - 1^m,648 = 2^m,352$; par conséquent, en augmentant d'autant la cote du point C, je n'aurai pas altéré la différence de niveau de ces deux points. Je prends donc $1^m,400 + 2^m,352 = 3^m,752$ pour nouvelle cote de C. Fig. 340.

Mais j'augmente ainsi la cote-arrière du point C, $1^m,757$, de $3^m,752 - 1^m,757 = 1^m,995$: donc il faut ajouter cette différence à la cote-avant de D, ce qui donne pour nouvelle cote de ce point $1^m,500 + 1^m,995 = 3^m,495$, et ainsi de suite.

Cela fait, je rapporte graphiquement mon nivellement à une seule ligne de niveau, en prenant une échelle pour les longueurs

et une autre pour les hauteurs (ordinairement la seconde est triple de la première); et une simple soustraction suffit alors pour nous montrer que le point A est plus élevé que B de 0m,850.

26. Pour faire la preuve d'un nivellement, on le recommence, mais en allant de B vers A, et l'on écrit les nouvelles cotes à la suite de celles du premier, comme si ces deux nivellemens n'en faisaient qu'un seul. On ajoutera ensuite tous les coups-arrière, pareillement tous les coups-avant, et, si les deux sommes diffèrent très-peu, on a de grandes probabilités d'avoir bien opéré.

27. Non-seulement le terrain peut changer de forme sur la longueur, mais encore sur la largeur de l'ouvrage qu'on se propose d'exécuter: il faut donc encore niveler le terrain *sur une*
Fig. 339. largeur convenable. Supposons que la ligne ACD..... *B* représente, par exemple, l'axe d'une route qui doive avoir 12m de largeur: pendant que le *niveau* est en M, on fait porter la mire successivement aux points A_1 et A_2 situés à 6m de A sur une perpendiculaire à la direction AC, et l'on écrit sur un petit profil tracé au dessous de A les cotes trouvées 1m,758 et 1m,450. On continuera ensuite de prendre des profils en travers aux points
Fig. 340. C, D..... B, et, après avoir réduit tous ces profils à la même surface de niveau que le profil en long, on les rapportera ensuite graphiquement.

FIN.

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A CENT UNITÉS.

D.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	DIFF.
0°	0,00	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	29
1	1,75	2,04	2,33	2,62	2,91	3,20	
2	3,49	3,78	4,07	4,36	4,65	4,94	
3	5,23	5,53	5,82	6,11	6,40	6,69	
4	6,98	7,27	7,56	7,85	8,14	8,43	
5	8,72	9,01	9,31	9,60	9,89	10,18	
6	10,47	10,76	11,05	11,34	11,63	11,92	
7	12,21	12,50	12,79	13,08	13,37	13,66	
8	13,95	14,24	14,53	14,82	15,11	15,40	
9	15,69	15,98	16,27	16,56	16,85	17,14	
10	17,43	17,72	18,01	18,30	18,59	18,88	
11	19,17	19,46	19,75	20,04	20,33	20,62	
12	20,91	21,20	21,48	21,77	22,06	22,35	
13	22,64	22,93	23,22	23,51	23,80	24,09	
14	24,37	24,66	24,95	25,24	25,53	25,82	
15	26,11	26,39	26,68	26,97	27,26	27,55	
16	27,83	28,12	28,41	28,70	28,99	29,27	
17	29,56	29,85	30,14	30,42	30,71	31,00	
18	31,29	31,57	31,86	32,15	32,44	32,72	
19	33,01	33,30	33,58	33,87	34,16	34,44	
20	34,73	35,02	35,30	35,59	35,87	36,16	
21	36,45	36,73	37,02	37,30	37,59	37,88	
22	38,16	38,45	38,73	39,02	39,30	39,59	
23	39,87	40,16	40,44	40,73	41,01	41,30	
24	41,58	41,87	42,15	42,44	42,72	43,00	28
25	43,29	43,57	43,86	44,14	44,43	44,71	
26	44,99	45,27	45,56	45,84	46,12	46,41	
27	46,69	46,97	47,25	47,54	47,82	48,10	
28	48,38	48,67	48,95	49,23	49,51	49,79	
29	50,08	50,36	50,64	50,92	51,20	51,48	
30	51,76	52,04	52,33	52,61	52,89	53,17	
31	53,45	53,73	54,01	54,29	54,57	54,85	
32	55,13	55,41	55,69	55,97	56,25	56,52	
33	56,80	57,08	57,36	57,64	57,92	58,20	
34	58,47	58,75	59,03	59,31	59,59	59,86	
35	60,14	60,42	60,70	60,97	61,25	61,53	
36	61,80	62,08	62,36	62,64	62,91	63,19	
37	63,46	63,74	64,01	64,29	64,56	64,84	
38	65,11	65,39	65,66	65,94	66,21	66,49	
39	66,76	67,04	67,31	67,59	67,86	68,13	27
40	68,40	68,68	68,95	69,22	69,49	69,77	
41	70,04	70,31	70,59	70,86	71,13	71,40	
42	71,67	71,95	72,22	72,49	72,76	73,03	
43	73,30	73,57	73,84	74,11	74,38	74,65	
44	74,92	75,19	75,46	75,73	76,00	76,27	

TABLE DES CORDES

POUR UN RAYON ÉGAL A CENT UNITÉS.

D.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	DIFF.
45°	76,54	76,80	77,07	77,34	77,61	77,88	27
46	78,15	78,41	78,68	78,95	79,22	79,48	
47	79,75	80,02	80,28	80,55	80,82	81,08	
48	81,35	81,61	81,88	82,14	82,41	82,67	
49	82,94	83,20	83,47	83,73	84,00	84,26	
50	84,52	84,79	85,05	85,32	85,58	85,84	26
51	86,10	86,36	86,63	86,89	87,15	87,41	
52	87,67	87,94	88,20	88,46	88,72	88,98	
53	89,24	89,50	89,76	90,02	90,28	90,54	
54	90,80	91,06	91,32	91,57	91,83	92,09	
55	92,35	92,61	92,87	93,12	93,38	93,64	
56	93,89	94,15	94,41	94,66	94,92	95,18	
57	95,43	95,69	95,94	96,20	96,45	96,71	
58	96,96	97,22	97,47	97,72	97,98	98,23	
59	98,48	98,74	98,99	99,24	99,49	99,75	25
60	100,00	100,25	100,50	100,75	101,01	101,26	
61	101,51	101,76	102,01	102,26	102,51	102,76	
62	103,01	103,26	103,51	103,75	104,00	104,25	
63	104,50	104,75	105,00	105,24	105,49	105,74	
64	105,98	106,23	106,48	106,72	106,97	107,21	
65	107,46	107,71	107,95	108,19	108,44	108,68	
66	108,93	109,17	109,41	109,66	109,90	110,14	24
67	110,39	110,63	110,87	111,11	111,36	111,60	
68	111,84	112,08	112,32	112,56	112,80	113,04	
69	113,28	113,52	113,76	114,00	114,24	114,48	
70	114,72	114,95	115,19	115,43	115,67	115,90	
71	116,14	116,38	116,61	116,85	117,09	117,32	
72	117,56	117,79	118,03	118,26	118,50	118,73	
73	118,96	119,20	119,43	119,66	119,90	120,13	
74	120,36	120,60	120,83	121,06	121,29	121,52	23
75	121,75	121,98	122,21	122,44	122,67	122,90	
76	123,13	123,36	123,59	123,82	124,05	124,27	
77	124,50	124,73	124,96	125,18	125,41	125,64	
78	125,86	126,09	126,32	126,54	126,77	126,99	
79	127,21	127,44	227,66	127,89	128,11	128,33	22
80	128,56	128,78	129,00	129,22	129,44	129,66	
81	129,89	130,11	130,33	130,55	130,77	130,99	
82	131,21	131,43	131,65	131,87	132,09	132,31	
83	132,52	132,74	132,96	133,18	133,39	133,61	
84	133,83	134,04	134,26	134,47	134,69	134,90	21
85	135,12	135,33	135,55	135,76	135,97	136,19	
86	136,40	136,61	136,82	137,04	137,25	137,46	
87	137,67	137,88	138,09	138,30	138,51	138,72	
88	138,93	139,14	139,35	139,56	139,77	139,97	
89	140,18	140,39	140,60	140,80	141,01	141,21	

TABLE DES MATIÈRES.

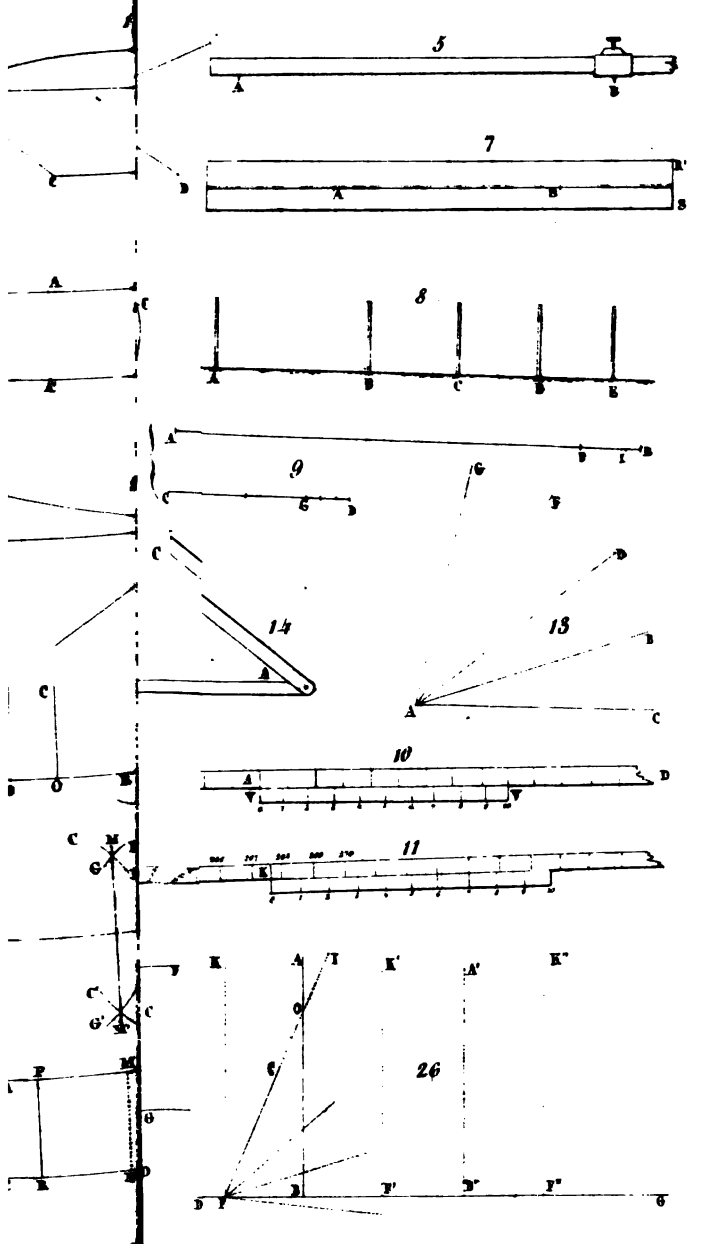
25

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

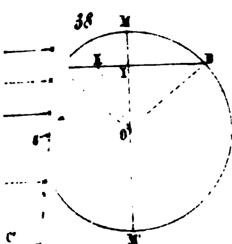
ERRATA.

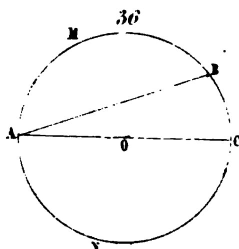
PAGE 17, *ligne 4 en remontant*, BD, *lisez* CD.
— 41, *ligne* 9, OA, *lisez* OC.
— 55, *ligne* 8 *en rem.*, Fig. 55, *lisez* Fig. 55.
— 57, *ligne* 1, *ajoutez* Fig. 57.
— — *ligne* 14 *en rem.*, IC, *lisez* IK.
— 66, *ligne* 4 *en rem.*, 1452, *lisez* 1591.
— 73, *ligne* 6 *en rem.*, OI=OK=R, *lisez* R.
— 82, *ligne* 13 *en rem.*, FGA, *lisez* FCA.
— 106, *lignes* 7, 8, 9 *en rem.*, 77, *lisez* 7—7.
— 107, *ligne* 19, Fig. 105, *lisez* Fig. 126.
— 111, *ligne* 7, *ajoutez* Fig. 135.
— 117, n.° 288, *ôtez les accens de la lettre* A.
— 134, *ligne* 18 *en rem.*, + sin x cos y, *lisez* + sin y cos x.
— — *ligne* 17 *en rem.*, — sin x cos y, *lisez* — sin y cos x.
— 136, *ligne* 20, Dans les deux cas, etc., *lisez* OX dans le premier cas et AX dans le second résoudront le problème.
— 142, *ligne* 12, *supprimez* K'.
— 161, *ligne* 10, *supprimez cette phrase.*
— 170, *ligne* 15, *supprimez* inscrit.
— 175, *ligne* 17 *en rem.*, l'angle O, *lisez* l'angle A.
— 176, *ligne* 2, GK, *lisez* GH.
— 198, *ligne* 7 *en rem.*, cette quantité, *lisez* cette dernière quantité.
— 208, *lignes* 6 *et* 7 *en rem.*, 2,1118, *lisez* 2,0118; *et* 1,0559, *lisez* 1,009.
— 226, *ligne* 11, AB''' AB^{IV}, *lisez* AB''' et BB^{IV}.
— 263, *ligne* 12, SDI, *lisez* SOI.
— 279, *ligne* 20, inverse, etc., *lisez* même des carrés de leurs distances aux disques qu'elles éclairent respectivement.
— 287, *ligne* 10, une pointe d'un, *lisez* un.
— 299, *ligne* 4, 351, *lisez* 208.
— 329, *ligne* 1 *en rem.*, A'B'a, *lisez* A'B'a'.
— 331, *ligne* 14, CNDGC, *lisez* NDCG.
— 336, *ligne* 14 *en rem.*, Fig. 312, *lisez* Fig. 311 bis.
— 338, *ligne* 13, AG, *lisez* AM.
— — *ligne* 15, AM, *lisez* AG.
— 341, *ligne* 4, *ajoutez* Fig. 315.
— 351, *ligne* 12, A'B, *lisez* A'B'.

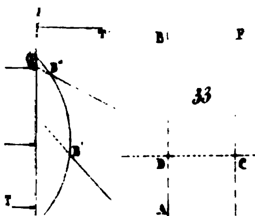


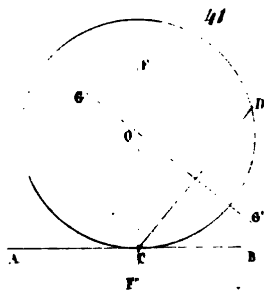
Dijon. Lith. de Bouillier.

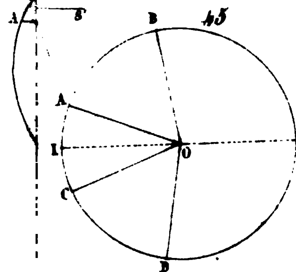
Planc

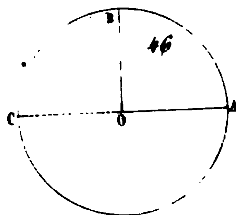


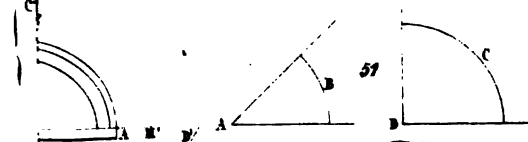


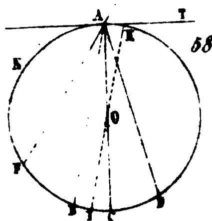


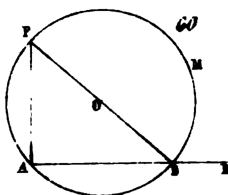












Dijon Lith. de Boullier.

61

62

66

67

69

84

Dupuis, Lith. ... Bouillier

Géométrie.

92

80

107

103

110

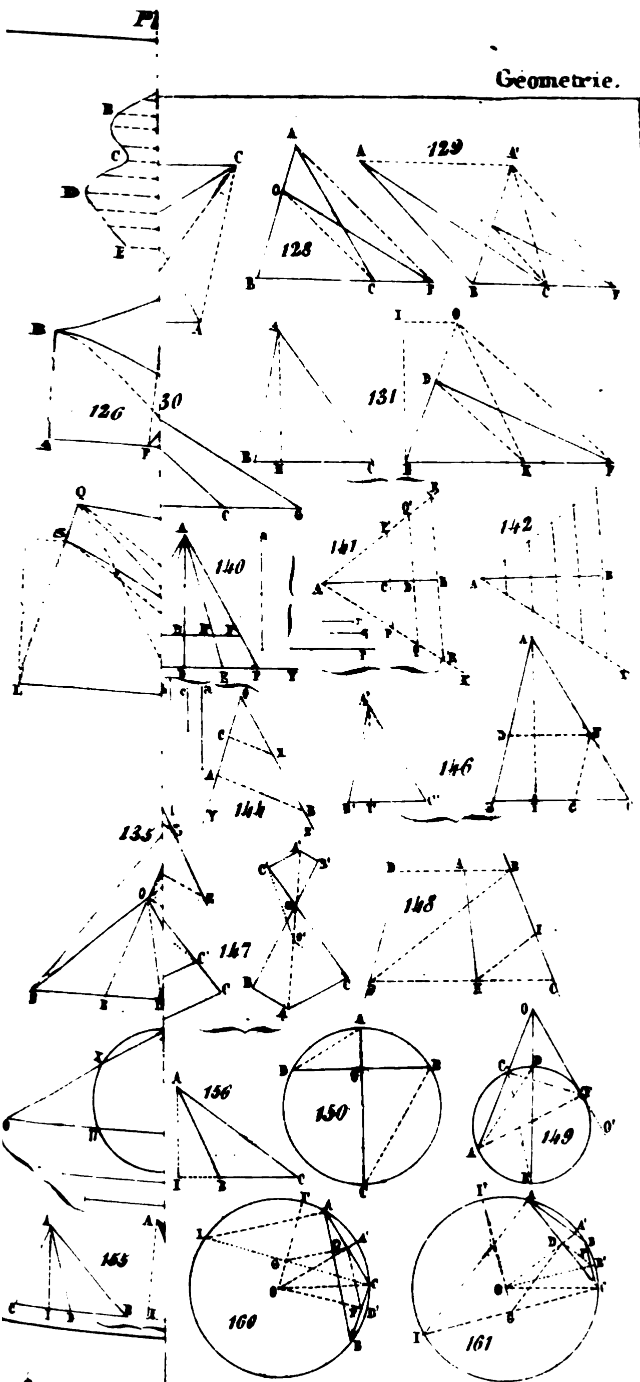
112

111

113

122

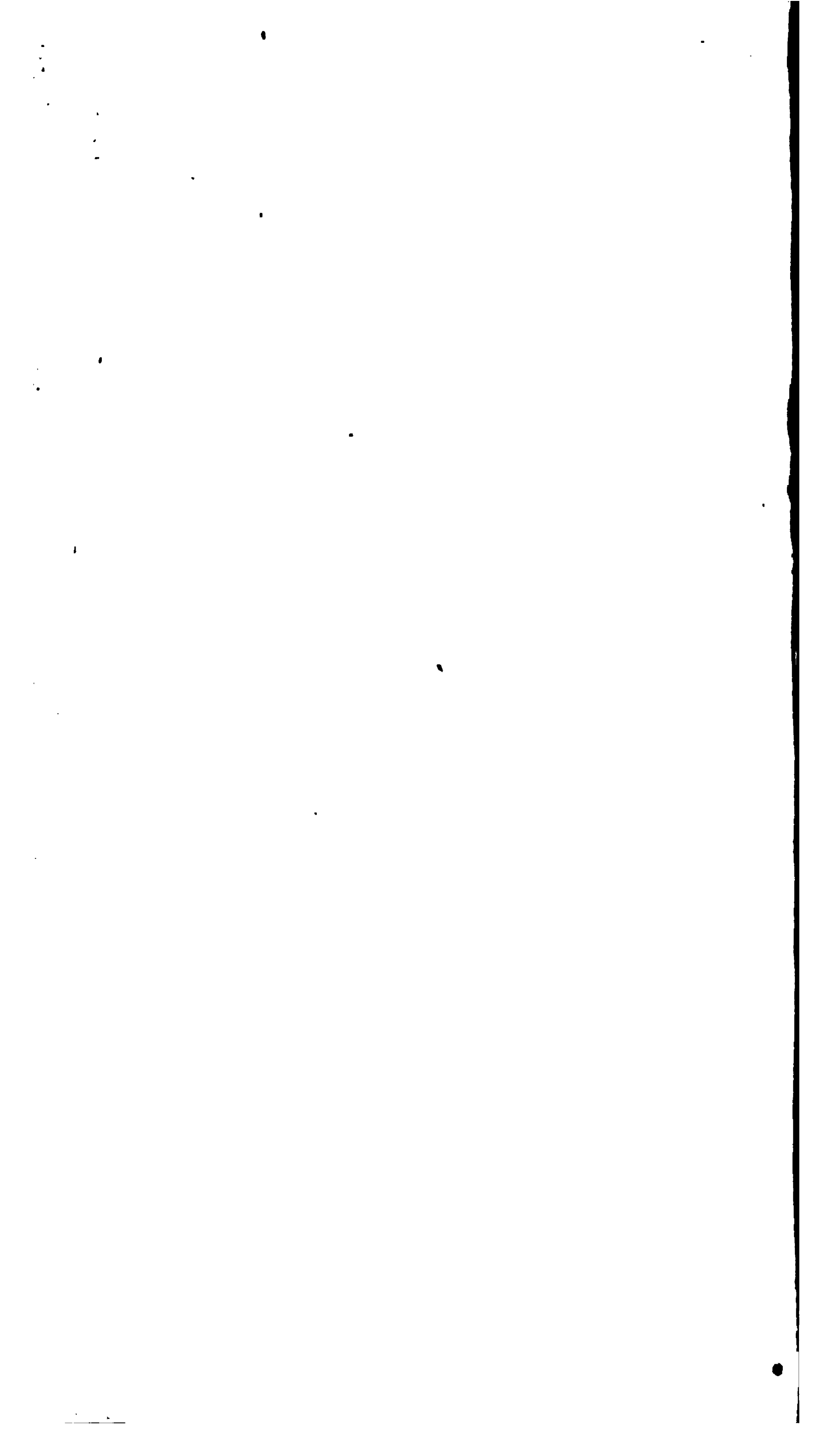
Dijon, Lith. de Bouillier

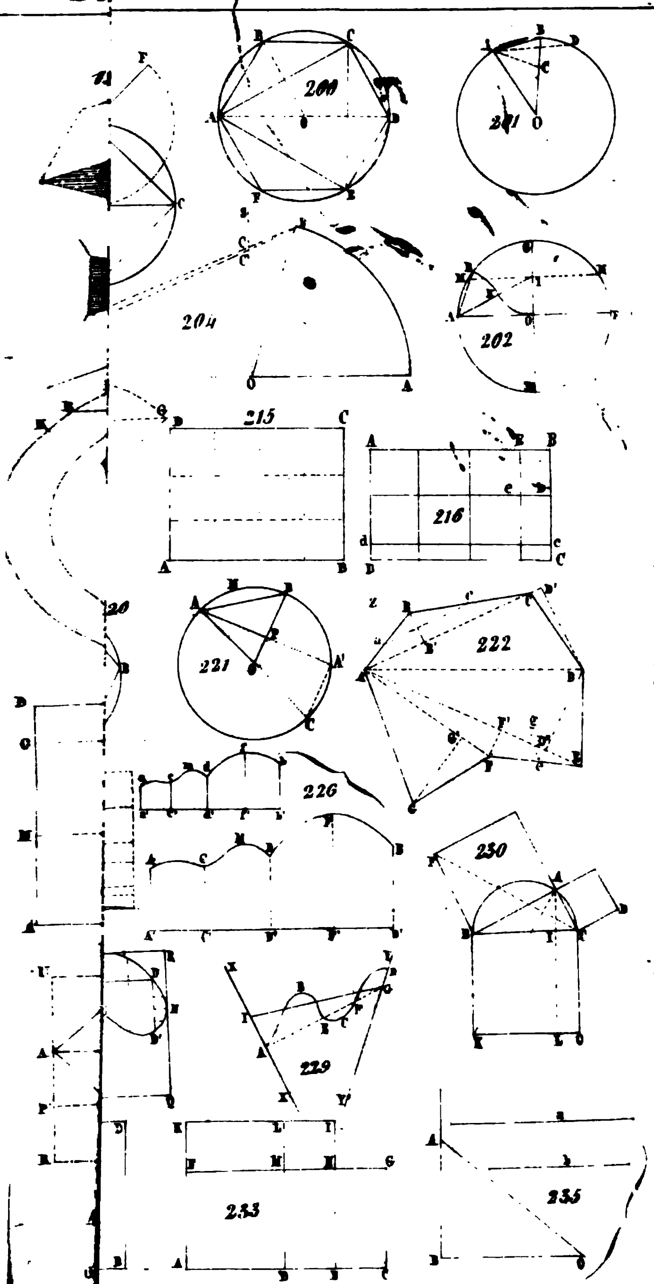


Dijon, Lith. de Bouiller.

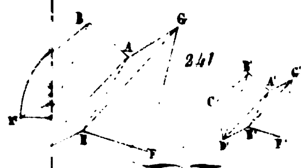
Géométrie.

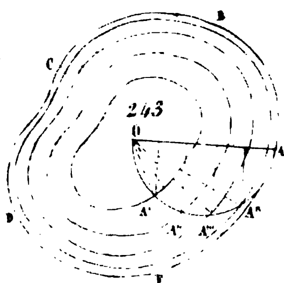


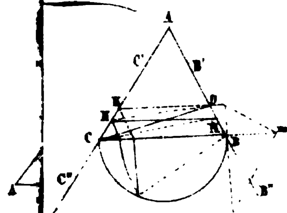


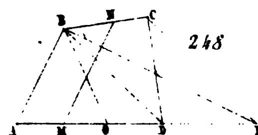


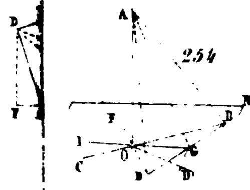
Dijon, Lith. de Doulliler.

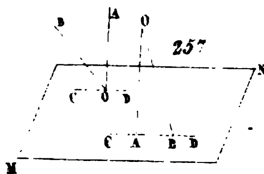

241

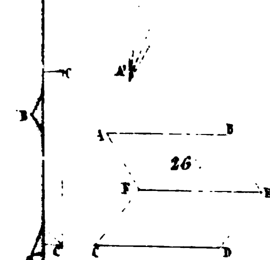

243

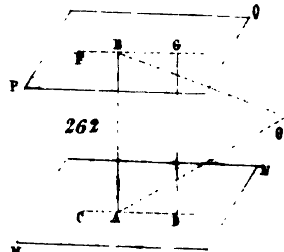


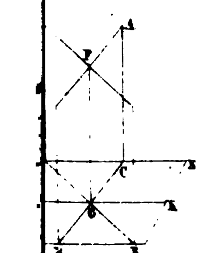

248

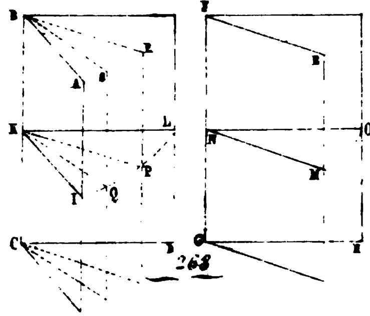

254


257

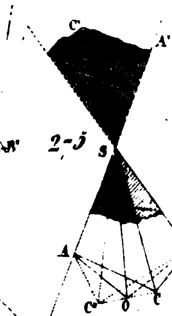


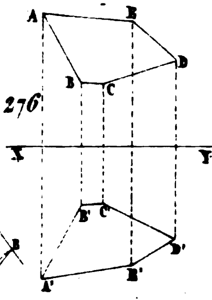

262

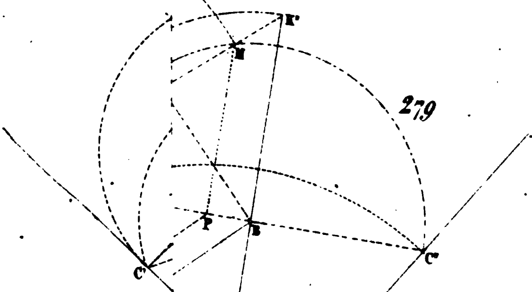


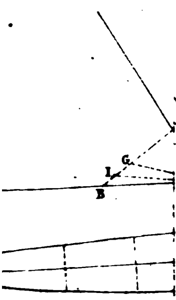

268

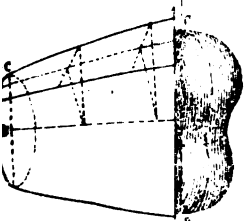


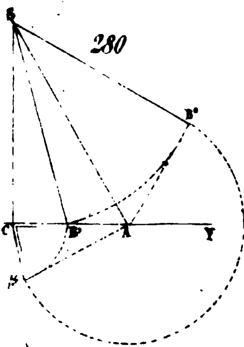


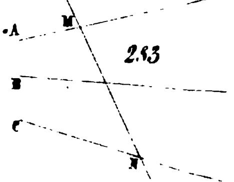






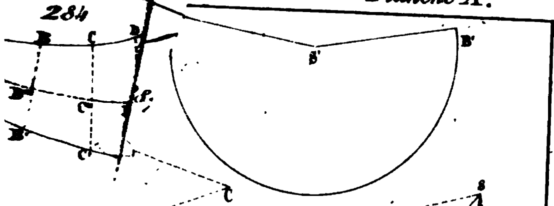


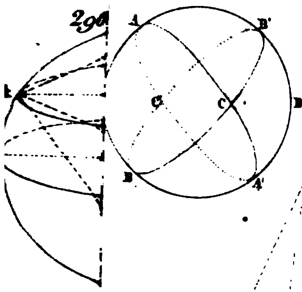


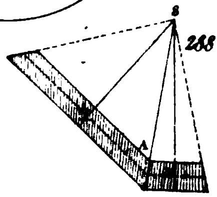


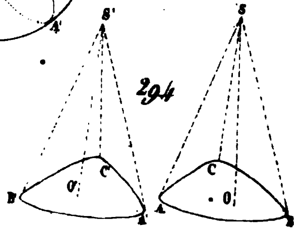
Dijon. Lith. de Doulliet.

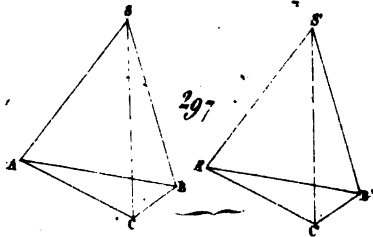


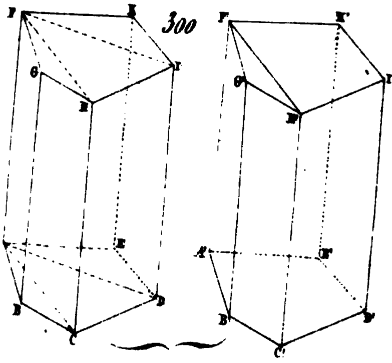


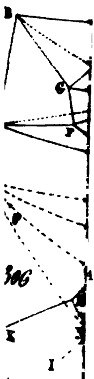












Dijon. Lith. de Bonilliar.

307

312

311 bis

318

317

314

321

320

328

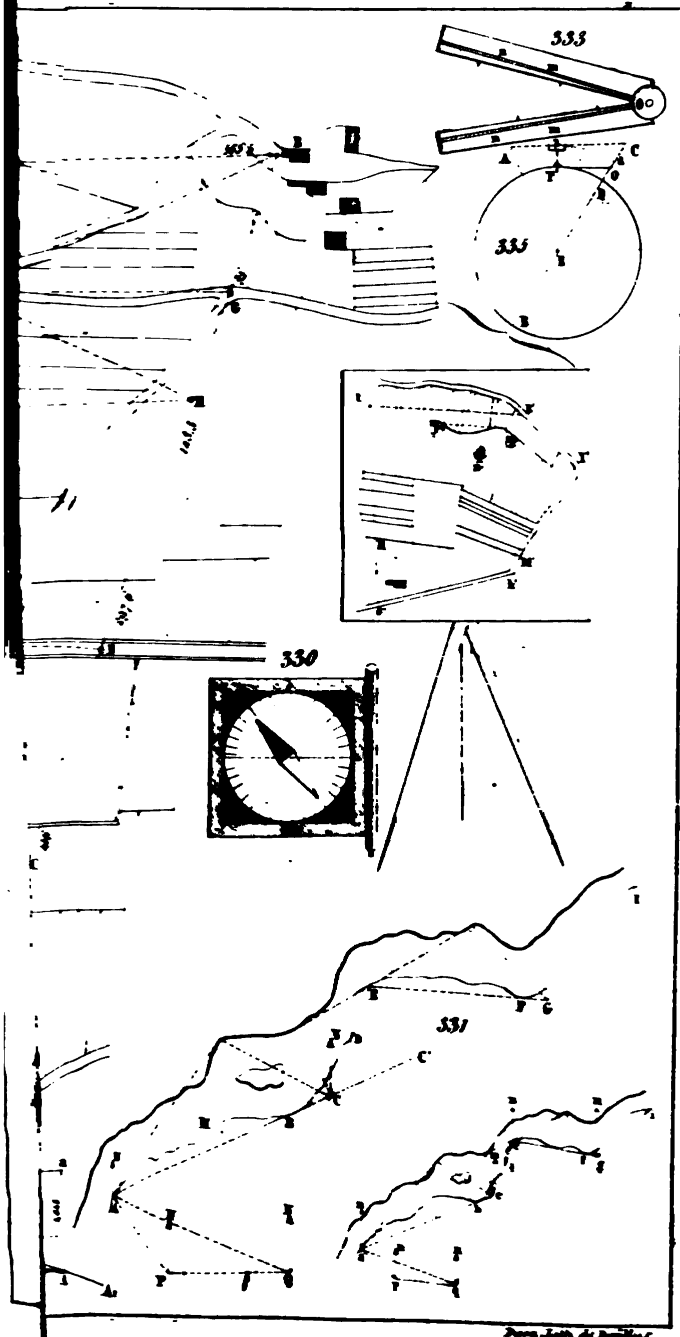
329

336

338

Dijon, Lith. de Boullier.





Dupuy Lith. des Batailles.